

, Ai miei alunni di Geometria

LA GEOMETRIA

(piana)

UTILE

allo studio della

TOPOGRAFIA

Franco Castagnola

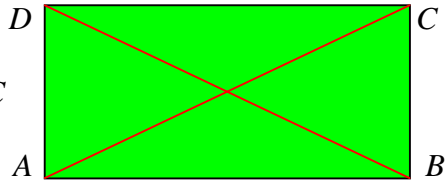
Richiami di geometria piana

(utili per il successivo studio del cilindro cono e tronco di cono)

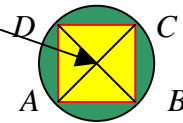
Rettangolo:

Def. *Quadrilatero con i quattro angoli retti.* D

Proprietà: *Dalla congruenza dei due triangoli $DAB; ABC$ rispettivamente rettangoli in A e B consegue la congruenza delle diagonali, $AC=BD$.*



Ogni rettangolo gode della proprietà di poter essere inscritto in una circonferenza avente come centro il punto O di incontro delle diagonali, e di conseguenza, come raggio la metà di una delle diagonali.



Indicando con $b > 0$ la misura del lato AB ,

$a > 0$ “ “ “ “ AD ;

$d > 0$ “ “ della diagonale;

Il Perimetro P ($2p$) del rettangolo risulta dalla relazione: $P = 2a + 2b$;

Il semiperimetro p “ “ “ “ $p = a + b$; $p - a = b$;
 $p - b = a$

L'area S $S = a * b$

Da cui si ricava

$$b = \frac{S}{a}$$

$$a = \frac{S}{b}$$

Dal triangolo ABC rettangolo in B , applicando il Teorema di Pitagora, si ricava

$$d^2 = a^2 + b^2$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

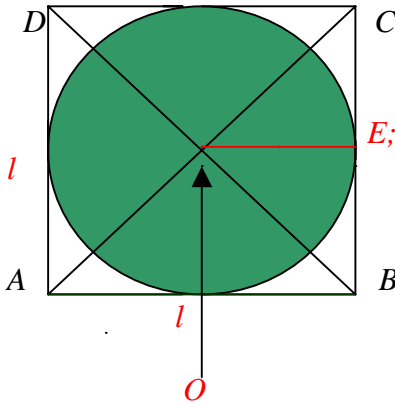
A sua volta il raggio della circonferenza circoscritta si ottiene da

$$R = \frac{d}{2};$$

$$R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

IL QUADRATO

Definizione : un quadrilatero con tutti e quattro gli angoli retti, e con due lati consecutivi eguali.



$E; OE = r > 0$

Posto la misura di $AB = l$ ($l > 0$) si ha :

$Perimetro = P = 2p = 4l;$

$Area = S = l * l = l^2$

da cui, si ottengono le due derivate:

$$l = \frac{P}{4};$$

$$l = \sqrt{S}$$

Dal triangolo ACB rettangolo in B, per Pitagora si ha:

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2}$$

ma $AB = BC = l$ e $AC = d$, diagonale, quindi

$$d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2l^2} = l\sqrt{2};$$

da cui

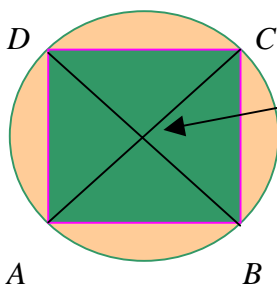
$$l = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} d;$$

In ogni quadrato si puo' sempre inscrivere un cerchio, indicando con $r > 0$ la misura del suo raggio si ha :

$$r = \frac{1}{2} l;$$

$$l = 2r;$$

Un quadrato puo' sempre essere inscritto in un cerchio



posto $OA = OC = OB = OD = R > 0$

$$\overline{AB} = \overline{BC} = l > 0$$

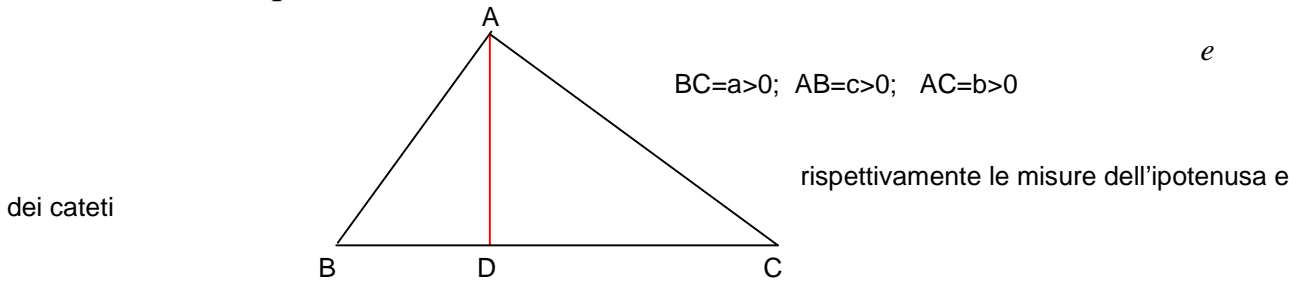
$$\overline{AC} = d = 2R$$

$$R = \frac{\overline{AC}}{2} = \frac{d}{2}$$

Il Triangolo Rettangolo

**Sia ABC un dato triangolo rettangolo in A ,
cateti, BC l'ipotenusa**

Essendo AB ; AC i



Condotto AD perpendicolare a BC , poniamo
la misura dell'altezza relativa all'ipotenusa

$$\overline{AD} = h$$

con h numero positivo, mentre con
 BD e DC

indicheremo la proiezione del cateto AB , AC , rispettivamente, sull'ipotenusa.

Sussistono i seguenti teoremi (ci limitiamo all'enunciato aritmetico)

I) **TEOREMA DI PITAGORA**

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 \longrightarrow \begin{cases} \overline{BC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2} \\ \overline{AB} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2} = \sqrt{(\overline{BC} + \overline{AC}) \cdot (\overline{BC} - \overline{AC})}; \\ \overline{AC} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{(\overline{BC} + \overline{AB}) \cdot (\overline{BC} - \overline{AB})} \end{cases}$$

II- a) 1° **TEOREMA DI EUCLIDE**

$$\overline{BC} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{BD} \longrightarrow \begin{cases} \overline{AB} = \sqrt{\overline{BC} \cdot \overline{BD}} \\ \overline{BC} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BD}} \\ \overline{BD} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}} \end{cases}$$

Analogamente

$$\overline{BC} : \overline{AC} = \overline{AC} : \overline{DC} \longrightarrow \begin{cases} \overline{AC} = \sqrt{\overline{BC} \cdot \overline{DC}} \\ \overline{BC} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{DC}} \\ \overline{DC} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}} \end{cases}$$

b) 2°) Teorema di Euclide

$$\overline{BD}:h = h:\overline{DC}$$

Da cui

$$\left\{ \begin{array}{l} h = \sqrt{\overline{BD} \cdot \overline{DC}} \\ \overline{BD} = \frac{h^2}{\overline{DC}} \\ \overline{DC} = \frac{h^2}{\overline{BD}} \end{array} \right.$$

III) Area del triangolo

Dalla formula generale dell'area di un triangolo qualsiasi $S = \frac{1}{2} b \cdot h$ si può ricavare:

$$S = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{AC}$$

$$S = \frac{1}{2} \overline{BC} \cdot \overline{AD}$$

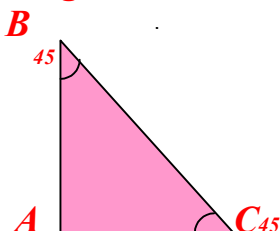
dal confronto di queste due formule si ricava una importante relazione:

$$\overline{BC} \cdot \overline{AD} = \overline{AB} \cdot \overline{AC}$$

che ci permette, noti tre elementi del triangolo ricavare il quarto, e in particolare:

$$\overline{AD} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\overline{BC}}$$

Triangolo rettangolo con un angolo di 45°



$$\widehat{B} = 45^\circ$$

$$\widehat{C} = 45^\circ$$

$$\overline{AB} = \overline{AC}$$

Il Triangolo BAC evidentemente è la metà di un quadrato per cui:

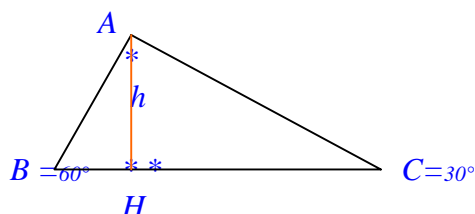
Problema 1° Noto un cateto trovare gli altri lati:

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= \overline{AB} \\ \overline{BC} &= \sqrt{2}\overline{AB} \end{aligned}$$

Problema 2° Nota l'ipotenusa trovare i cateti :

$$\overline{AB} = \frac{\overline{BC}}{\sqrt{2}} = \overline{BC} \frac{\sqrt{2}}{2} = \overline{AC};$$

TRIANGOLO RETTANGOLO CON UN ANGOLO DI 60°



Per un noto teorema l'ipotenusa è il doppio del cateto minore

Problema 1°) Noto il cateto minore AC trovare l'altro cateto AC e l'Ipotenusa BC

$$\begin{aligned} \overline{BC} &= 2\overline{AC} \\ \overline{AB} &= \sqrt{3}\overline{AC} \end{aligned}$$

Problema 2°) Nota l'Ipotenusa BC calcolare i due cateti

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= \frac{1}{2}\overline{BC}; \\ \overline{AB} &= \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{BC} \end{aligned}$$

ricordiamo che un triangolo di questo tipo è la metà di un triangolo equilatero

Problema 3°) Si conosce il cateto maggiore AB, calcolare l'ipotenusa e l'altro cateto:

$$BC = \frac{2\sqrt{3}}{2} AB;$$

$$AC = \frac{\sqrt{3}}{3} AB$$

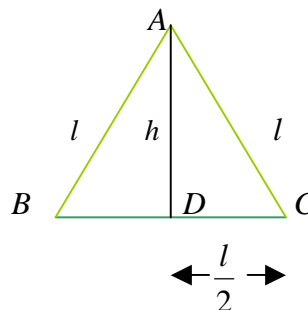
TRIANGOLI PARTICOLARI

1) Il Triangolo Equilatero

Indicata con $l > 0$ la misura dei lati uguali ;

“ “ $h > 0$ “ dell'altezza AH

Dal triangolo AHB rettangolo in H, si ha:



$$AD = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{4l^2 - l^2}{4}} = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} = \frac{l}{2}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}l;$$

In definitiva

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}l$$

passaggi si ricava:

$$l = \frac{2\sqrt{3}h}{3}$$

Area del Triangolo Equilatero:

$$S = \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{1}{2} l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} l = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2;$$

In definitiva

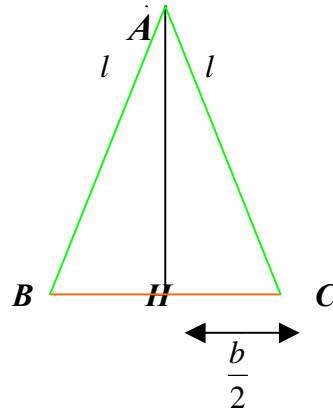
$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$$

Da questa relazione ,con semplici

Con la sua inversa

$$l = \sqrt{\frac{4S}{\sqrt{3}}}; -$$

2) Il Triangolo Isoscele



$$P = 2AB + BC;$$

$$p(\text{semiperimetro}) = AB + BH;$$

Gli elementi del triangolo:

$$h, l, \frac{b}{2}$$

possono essere ricavati dalla relazione Pitagorica, es..

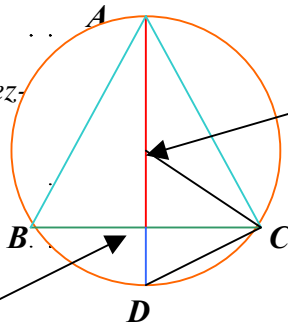
$$h = \frac{1}{2} \sqrt{4l^2 - b^2}$$

E così via...

TRIANGOLO ISOSCELE : Circoscritto e Inscritto

Sia ABC un triangolo isoscele sulla base BC , inscritto in una circonferenza di centro O e raggio $R > 0$.

Ogni volta che ci si trovi conviene prolungare l'altezza



a dover lavorare in questa situazione, la AH , relativa alla base BC , sino ad incontrare ulteriormente in D la circonferenza. In questo modo il triangolo ACD , per essere inscritto in una semicirconferenza, risulta rettangolo in C , essendo l'ipotenusa AD un diametro, e CH l'altezza relativa all'ipotenusa stessa.

A tale triangolo si potranno quindi applicare **Il teorema di Pitagora, e i due teoremi di Euclide**. Si osservi inoltre che, si vengono a formare tre triangoli rettangoli, particolarmente importanti: ADC ; AHC ; DHC .

$$D\bar{H} = 2R - A\bar{H}$$

$$A\bar{H} : H\bar{C} = H\bar{C} : (2R - A\bar{H})$$

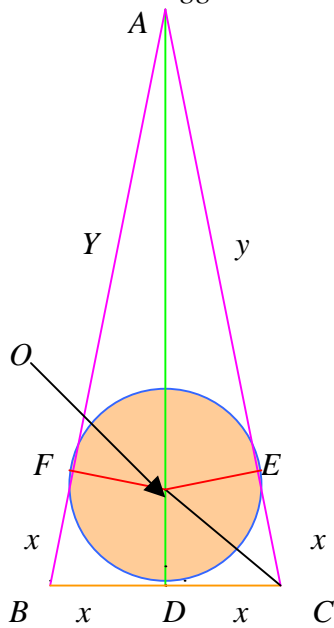
IL TRIANGOLO ABC È INDIVIDUATO QUANDO SI CONOSCE LA DISTANZA AH, DELLA BASE, DAL VERTICE .

Poiché

$$\overline{BC} = 2\overline{BH};$$

$$\overline{BC}^2 = 4\overline{BH}^2$$

Sia dato ora un triangolo ACB isoscele di vertice A, circoscritto ad una circonferenza di centro O e raggio $r > 0$.



Posto

$$\overline{AE} = \overline{AF} = y > 0$$

$$\overline{BF} = \overline{BD} = \overline{DC} = \overline{CE} = x > 0$$

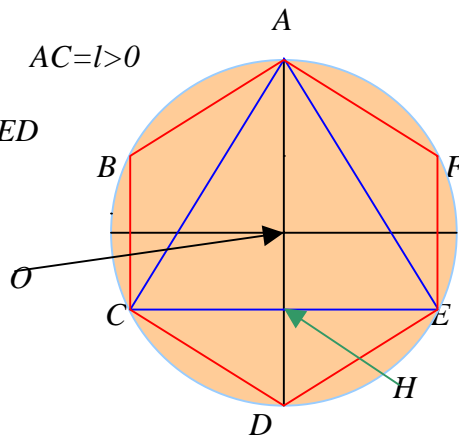
Si ha: I triangoli AOE (essendo O il centro della circonferenza) e ADC sono simili per il 1° criterio, pertanto

$$AO:AC = AE:AD = OE:DC$$

Il triangolo equilatero inscritto in un esagono regolare

$$AO = OD = R > 0 \quad AC = l > 0$$

Dal triangolo AED



$$HE = HC = l/2; \quad OH = HD = 1/2R;$$

rettangolo in E per il I di Euclide si ha:

$$2R:AC = AC:(R + 1/2R)$$

$$2R:AC = AC:3/2R \quad \text{da cui}$$

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= 2R \cdot \frac{3}{2}R \\ \overline{AC}^2 &= 3R^2 \\ \overline{AC} &= \overline{CD} = \overline{AD} = \sqrt{3}R \end{aligned}$$

Osserviamo che $AC=CE=AE=2CH=2HE$;

Si ha inoltre:

$$\begin{aligned} \overline{CH} &= \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}r^2} = \sqrt{\frac{3}{4}r^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}r; \\ \overline{AC} &= \sqrt{3}r \end{aligned}$$

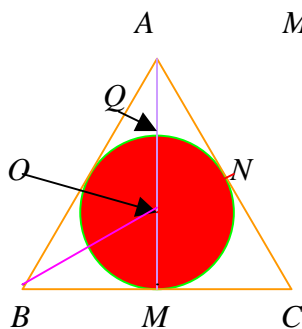
In definitiva tra il lato del triangolo equilatero e il raggio del cerchio ad esso circoscritto esiste la relazione:

$$l = \sqrt{3}r$$

Ricordiamo che il lato dell'esagono regolare è uguale al raggio r del cerchio ad esso circoscritto.

Il triangolo equilatero e il cerchio in esso inscritto

ABC triangolo equilatero di lato $l > 0$, circoscritto ad un cerchio di raggio $r > 0$.



$MO=MQ=QA=r$; Dal triangolo BMO rettangolo in M si ha :

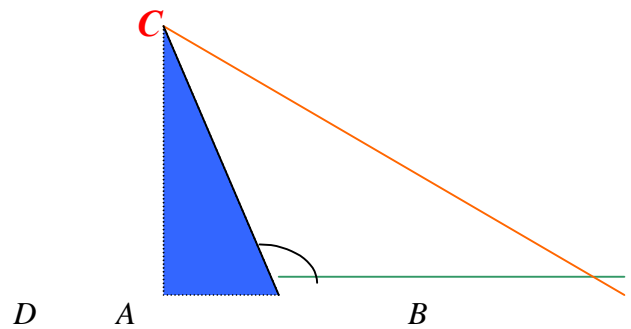
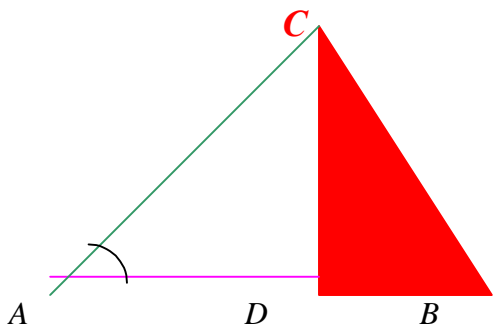
$$\begin{aligned} \overline{BM} &= \overline{MC} = \frac{l}{2} \\ \overline{AM} &= 3r = \frac{\sqrt{3}}{2} \overline{AC} \\ \overline{AC} &= \frac{6r}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}r}{3} = 2\sqrt{3}r; \end{aligned}$$

TEOREMI PARTICOLARMENTE IMPORTANTI

1)TEOREMA DI PITAGORA GENERALIZZATO (o di Ippocrate)

In ogni triangolo il quadrato di un lato è equivalente alla somma dei quadrati degli altri due lati meno o il doppio rettangolo di uno di questi due lati e della proiezione su questo dell'altro lato, a seconda che l'angolo opposto al lato considerato

ACUTO
sia oppure
OTTUSO



$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AD} \quad \text{se l'angolo di vertice A è acuto;}$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AD}; \quad \text{" " " " A è ottuso.}$$

TRIANGOLO EQUILATERO INSCRITTO e CIRCOSCRITTO

*Dal triangolo ACE, rettangolo in C
Euclide si ha:*

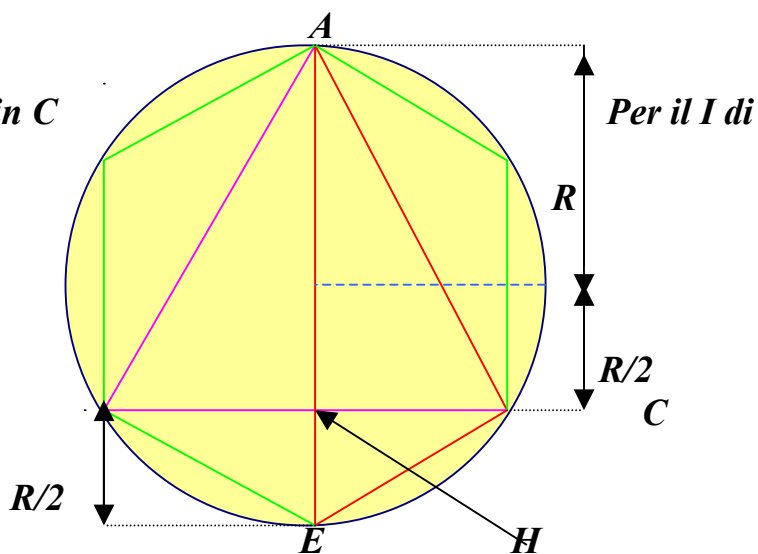
$$2R:AC=AC:(R+R/2)$$

Da cui

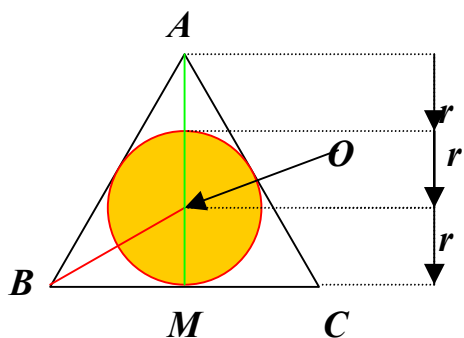
$$2R:AC=AC:3R/2$$

$$AC^2 = 2R \cdot \frac{3}{2}R$$

$$AC^2 = 3R^2$$



$$AC=AB=BC=\sqrt{3}R;$$



$$3r = \frac{\sqrt{3}}{2} AC;$$

$$AC = \frac{6r}{\sqrt{3}}$$

$$AC = \frac{6\sqrt{3}r}{3}$$

$$AC = AB = BC = 2\sqrt{3}r;$$

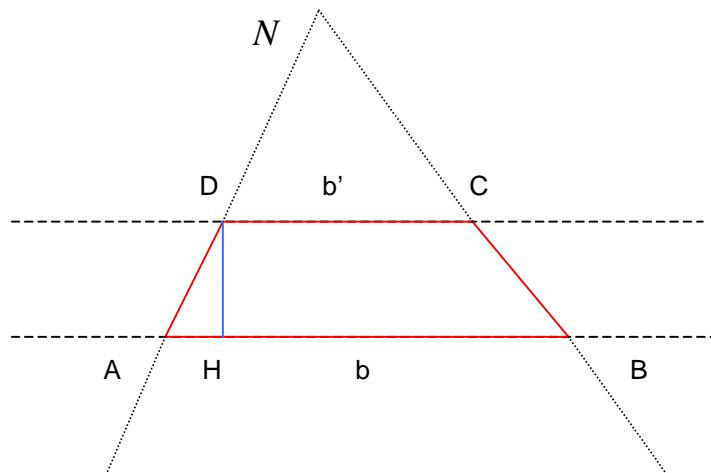
IL TRAPEZIO

DEF 1)

Si definisce trapezio, ogni quadrilatero avente due lati paralleli.
(i due lati paralleli vengono chiamati basi)

DEF 2)

Si definisce trapezio l'intersezione fra un angolo e una striscia di piano.

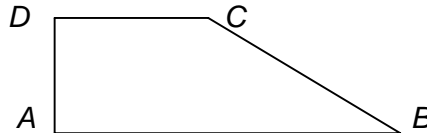


b' base minore
b base maggiore

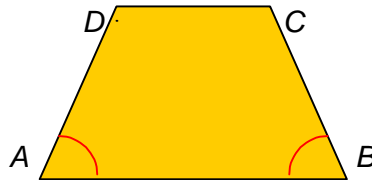
$DH = h > 0$ distanza tra le basi e quindi altezza del trapezio.

Area trapezio $S = (\text{semisomma basi}) \cdot \text{altezza} = \frac{1}{2}(b+b') \cdot h$

Se uno dei lati non paralleli è perpendicolare alle basi, il trapezio si dice rettangolo:



Se i due lati non paralleli sono congruenti il trapezio si dice Isoscele:



$$\overline{DA} = \overline{BC}$$

$$\hat{DAB} = \hat{ABC}$$

$$\hat{ADC} = \hat{BCD}$$

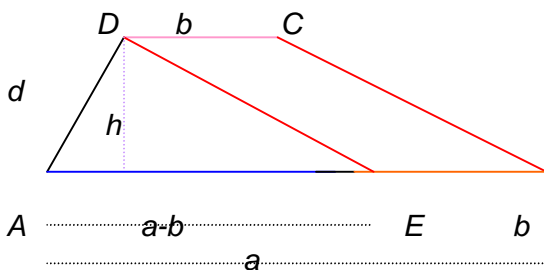
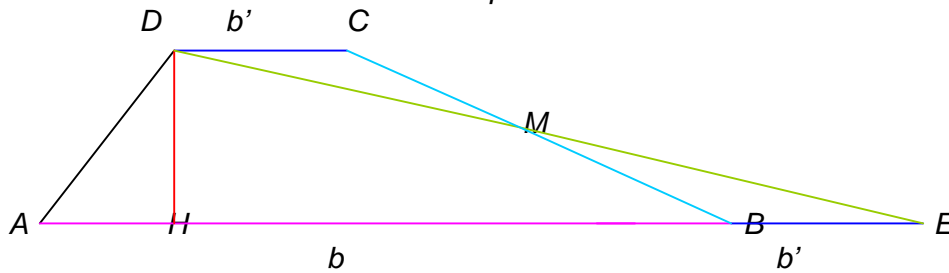
$$\hat{DAB} + \hat{ADC} = 180^\circ$$

$$S = \frac{1}{2}(b + b')h$$

$$b + b' = \frac{2S}{h}$$

$$h = \frac{2S}{b + b'}$$

Ricordiamo ancora che ogni trapezio è equivalente ad un triangolo, avente per base la somma delle basi, e come altezza la stessa altezza del trapezio.

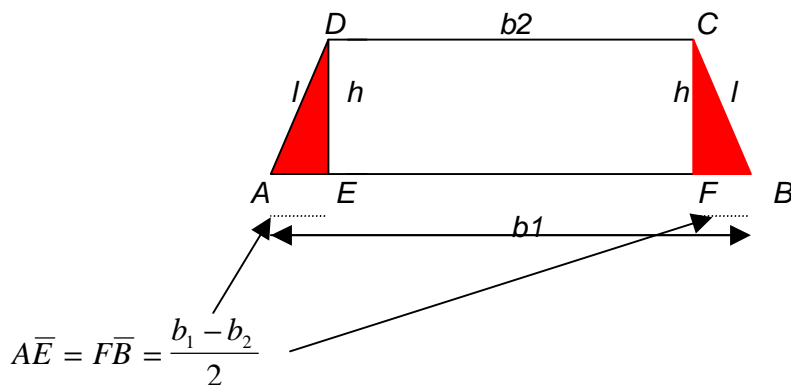


Del triangolo AED si conoscono i lati $DE = c > 0$; $AD = d > 0$; $AE = a - b$ con $a > b$;

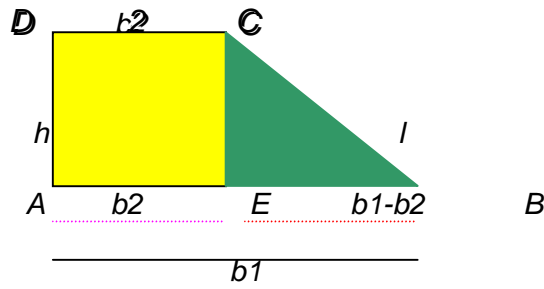
$$\frac{2S_{DEA}}{a - b} = h$$

TRAPEZI PARTICOLARI

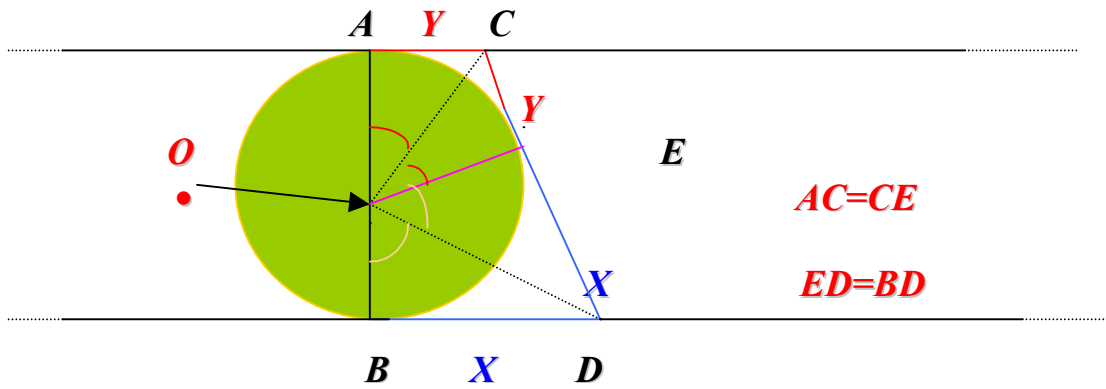
T.ISOSCELE



TRAPEZIO RETTANGOLO



TEOREMA IMPORTANTISSIMO



$OE=OA=OB= R>0;$

$\widehat{AOC} = \widehat{COE}$

$\widehat{BOD} = \widehat{DOE}$

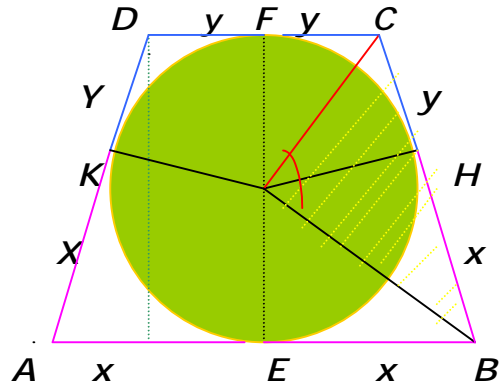
$\widehat{AOC} + \widehat{BOD} = \widehat{COE} + \widehat{DOE} = 1\text{RETTO}$

AOA

DI CONSEGUENZA $X:R=R:Y$ PER CUI

$XY = R^2$

TRAPEZIO ISOSCELE CIRCOSCRITTO AD UNA CIRCONFERENZA



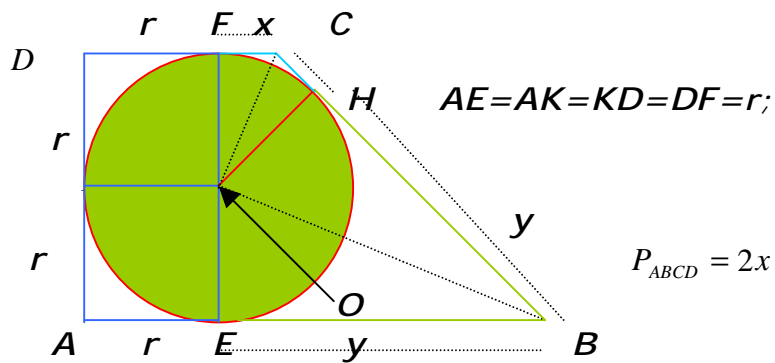
$$S_{ABCD} = (x + y)2r$$

$$P = 4x + 4y$$

$$x + y = \frac{P}{4}$$

$$XY = r^2$$

TRAPEZIO RETTANGOLO CIRCOSCRITTO AD UNA CIRCONFERENZA



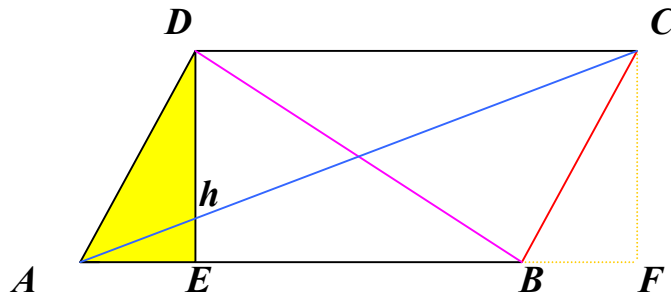
$$P_{ABCD} = 2x + 2y + 4r$$

$$S_{ABCD} = \frac{(r+x) + (r+y)}{2} * 2r =$$

$$((r+x) + (r+y)) * r$$

$$XY = r^2$$

PARALLELOGRAMMA



$$AB // DC$$

$$DA // CB$$

$$DE // AB$$

$$P_{ABCD} = 2\overline{AB} + 2\overline{AD}$$

$$p = \overline{AB} + \overline{AD}$$

$$S = \overline{AB} \cdot \overline{DE}$$

osserviamo che: $\overline{AE} = \overline{BF}$;

Dal triangolo DEB rettangolo in E si ricava:

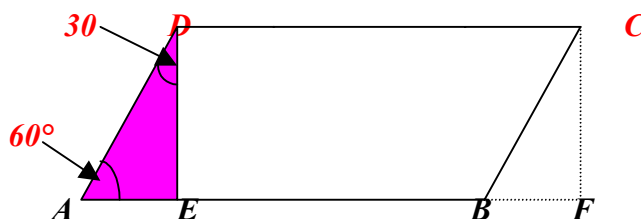
$$\overline{DB} = \sqrt{\overline{DE}^2 + \overline{EB}^2} = \sqrt{\overline{DE}^2 + (\overline{AB} - \overline{AE})^2}$$

(NATURALMENTE OCCORRE CONOSCERE \overline{AE})

$$\text{Dal triangolo } AFC \text{ rettangolo in } F \text{ si ricava: } \overline{AC} = \sqrt{\overline{DE}^2 + \overline{AF}^2} = \sqrt{h^2 + (\overline{AB} + \overline{AE})^2}$$

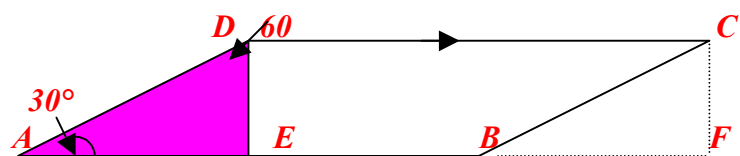
PARALLELOGRAMMI PARTICOLARI

Parallelogrammi con un angolo alla base di 60°

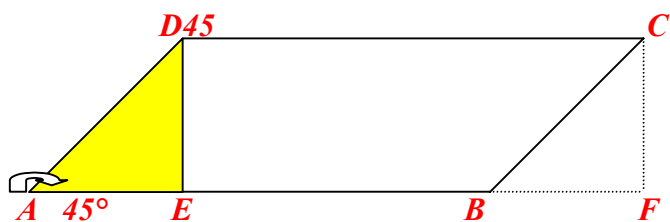


Ricordiamo che, per un noto teorema quando in un triangolo un angolo è di 30° , il cateto che gli sta opposto è la metà dell'ipotenusa.

Parallelogramma con un angolo alla base di 30°



Parallelogramma con un angolo alla base di 45°



***RICORDIAMO CHE IL TRIANGOLO RETTANGOLO ISOSCELE AED E'
LA META' DI UN QUADRATO DI LATO AE E DIAGONALE AD PERTANTO:***

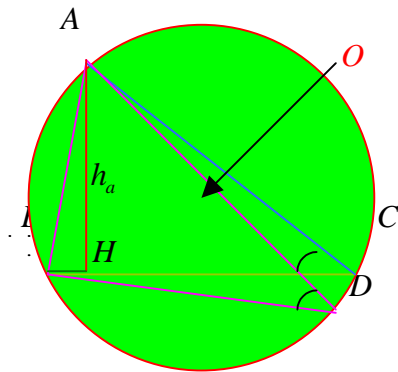
$$\overline{AD} = \overline{AE} \cdot \sqrt{2}$$

$$\overline{AE} = \frac{\overline{AD}}{\sqrt{2}} = \overline{AD} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

RELAZIONI FRA AREA DI UN TRIANGOLO E RAGGIO DEL CERCHIO CIRCOSCRITTO E INSCRITTO

Indicheremo con :

S la misura della superficie di un triangolo;
 R la misura del raggio del cerchio circoscritto ad esso;
 r la misura del raggio del cerchio inscritto;



Sia ABC un triangolo qualsiasi inscritto in un cerchio di centro O e raggio $R > 0$; Indicheremo con:

$a > 0$ la misura del lato BC ;
 $b > 0$ “ “ “ AC ;
 $c > 0$ “ “ “ AB

Condotto AH perpendicolare al lato BC , si unisce A con O ; sia D l'ulteriore intersezione con la circonferenza. Si unisce in fine B con D .

Si può facilmente notare che i due triangoli $ABD \sim AHC$

Hanno gli angoli

ABD e AHC congruenti in quanto retti;
 BDA e BCA congruenti in quanto angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco AB .

I suddetti triangoli sono pertanto simili, e quindi hanno i lati omologhi in proporzione:

ossia

$$c : h_a = \overline{AD} : b$$

$$c : h_a = 2R : b$$

da cui

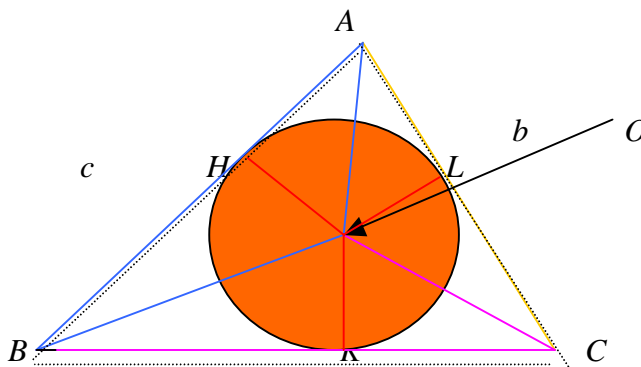
$$R = \frac{bc}{2h_a}$$

ricordando che

$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{2S}{a}$$

Si ha così la formula:

$$R = \frac{bc}{2\frac{S}{a}} = \frac{bc}{\frac{4S}{a}} = \frac{abc}{4S}$$



Ricordiamo che il centro O del cerchio inscritto nel triangolo ABC , è il punto di intersezione delle bisettrici degli angoli interni del triangolo, pertanto esso è equidistante dai lati.

Condotte da O le perpendicolari ai lati del triangolo, ognuno dei tre segmenti OH, OK, OL rappresenta il raggio della circonferenza, sia $r > 0$ la sua misura.

Si osservi ora che il triangolo dato ABC può essere considerato come formato dai tre triangoli BOA, BOC, COA , in ciascuno dei quali il raggio r rappresenta anche una delle altezze.

Pertanto si ha che:

$$S_{ABC} = S_{OBC} + S_{OCA} + S_{OAB}$$

da cui

$$S = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr$$

e quindi, raccogliendo

$$S = \frac{1}{2}r(a+b+c) \quad \text{ma } a+b+c = 2r \text{ quindi}$$

$$S = \frac{1}{2}r * 2p \quad \text{da cui per finire si ottiene la formula:}$$

$$\mathbf{S = pr} \quad \text{da cui } r = S/p$$

E ricordando la formula di ERONE

$$r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2}} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

RAGGI DEI CERCHI EXISCRITTI AD UN TRIANGOLO

DEF: si chiama cerchio exiscritto ad un triangolo quel cerchio tangente ad un lato e al prolungamento degli altri due .

Il centro di tale cerchio è il punto di intersezione delle bisettrici dei due angoli adiacenti al lato considerato , e alla bisettrice dell'angolo interno opposto a quel lato .

Indicheremo con i simboli :

r_a

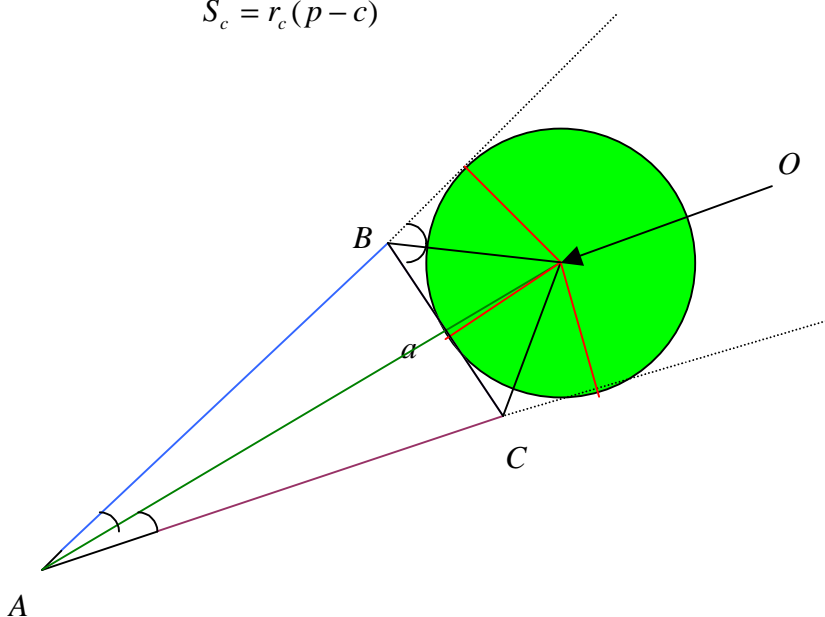
r_b

r_c rispettivamente i raggi dei cerchi tangenti esternamente ai lati a, b, c .

$$S_a = r_a (p - a)$$

Si puo' dimostrare che $S_b = r_b (p - b)$

$$S_c = r_c (p - c)$$



$$S_{ABC} = S_{OAC} + S_{OBC}$$

$$S = \frac{1}{2} br_a + \frac{1}{2} cr_a - \frac{1}{2} ar_a$$

$$S = \frac{1}{2} r_a (b + c - a)$$

$$S = \frac{1}{2} r_a 2(p - a)$$

Da cui:

$$S = r_a (p - a)$$

e infine:

$$r_a = \frac{S}{p-a}$$

$$r_b = \frac{S}{p-b}$$

$$r_c = \frac{S}{p-c}$$

ESPRESSIONE DELL'AREA S DI UN TRIANGOLO IN FUNZIONE DEI QUATTRO RAGGI

Sappiamo che :

$$r = \frac{S}{p}$$

$$r_a = \frac{S}{p-a}$$

$$r_b = \frac{S}{p-b}$$

$$r_c = \frac{S}{p-c}$$

$$\text{molt.m.am. } r * r_a * r_b * r_c = \frac{S^4}{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

ma $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ quadrando si ha:

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

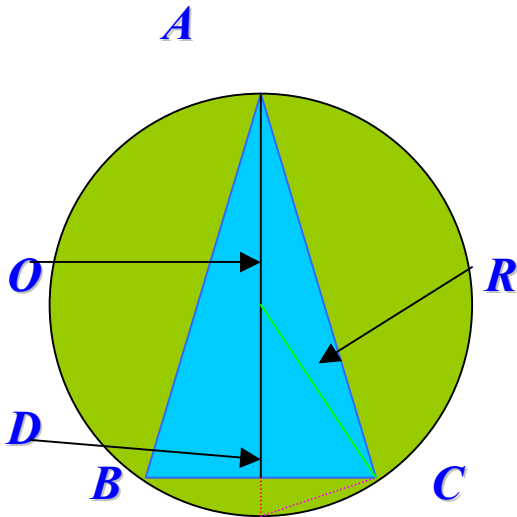
- 4 -

$$\text{da cui } r r_a r_b r_c = \frac{S^4}{S^2}; S^2 = r r_a r_b r_c$$

e per finire

$$\mathbf{S} = \sqrt{r r_a r_b r_c}$$

IMPORTANTISSIMO



*Quando si deve considerare un triangolo
Inscritto in una circonferenza di centro
O e raggio R. conviene prolungare l'altezza
AE sino ad incontrare ulteriormente
la circonferenza in E. In tal modo si*

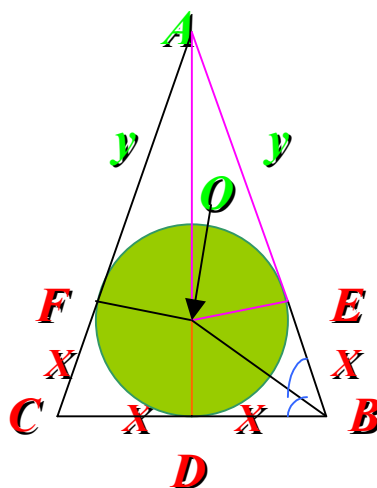
determina un triangolo AEC rettangolo in C, dove AE = 2R è l'ipotenusa, CD è l'altezza ad essa relativa, e al quale si possono quindi applicare i teoremi di PITAGORA e di EUCLIDE.

$$\overline{DE} = 2R - \overline{AD};$$

$$\overline{AD} : \overline{CD} = \overline{CD} : (2R - \overline{AD});$$

$$2R : \overline{AC} = \overline{AC} : \overline{AD}$$

Triangolo Isoscele circoscritto ad un cerchio di Raggio r



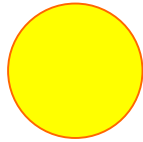
Si osservi che il triangolo AOE è simile al triangolo ADB, pertanto si ha:

$$AO : AB = AE : AD = OE : DB$$

CIRCONFERENZA E CERCHIO

Circonferenza: E' una linea chiusa ,luogo geometrico dei punti che hanno da un dato punto O detto centro,distanza uguale ad un segmento assegnato, detto raggio.

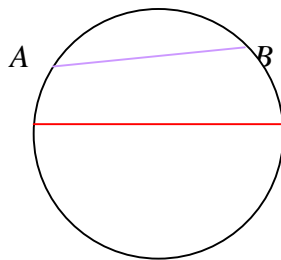
Cerchio:



Ogni circonferenza divide il piano in due parti,una esterna ed una interna, la parte di piano costituita dalla circonferenza e dai punti ad essa interni si chiama cerchio.

Di conseguenza :1) la circonferenza è una linea, mentre il cerchio è una parte di piano (superficie)

della quale la circonferenza costituisce il contorno.
2) la misura della circonferenza è una lunghezza, quella del cerchio è un'area.



Ogni segmento che congiunge due punti qualsiasi A,B di una circonferenza si chiama **CORDA**.
Ogni corda passante per il centro si chiama: **DIAMETRO** ,il diametro rappresenta la corda massima.

Indicheremo con $r > 0$ il raggio di una circonferenza, e con C la sua lunghezza.

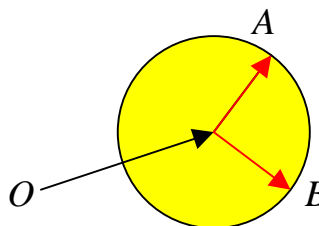
Il rapporto tra la lunghezza di una circonferenza e la lunghezza del suo diametro è un numero ,

irrazionale trascendente,**che viene indicato con il simbolo: $\pi = 3,14159.....$**

Quindi: $\frac{C}{2r} = \pi$ da cui $C = 2\pi r$; $\frac{C}{\pi} = 2r$;

L'area del cerchio è: $S = \frac{1}{2}(2\pi r)r = \pi r^2$ da cui $\frac{1}{2}Cr$ e quindi $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$

Detto O il centro della Circonferenza ed $l > 0$ la misura dell'arco \widehat{AB} , due raggi qualsiasi OA,OB divido-



no il cerchio in due parti, ciascuna delle quali prende il nome di Settore Circolare. L'angolo \widehat{AOB} si chiama angolo al centro.

Sussiste la seguente proporzione: $360^\circ : \alpha^\circ = 2\pi r : l$ da cui

$$l = \frac{2\pi r \cdot \alpha^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi r}{180^\circ} \alpha^\circ$$

Area del settore circolare:

Detta S l'area del settore circolare, sussiste la proporzione:

Area settore : area cerchio = ampiezza settore : ampiezza cerchio

$$S : \pi r^2 = \alpha^\circ : 360^\circ$$

1)

Dati r, α° calcolare S : dalla proporzione si ricava : $S = \frac{\pi r^2}{360} \alpha^\circ$

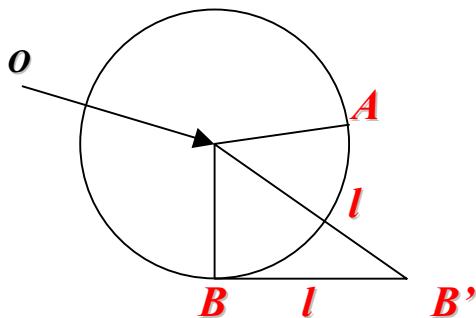
2)

Dati S ed r calcolare α° , sempre dalla proporzione si ricava : $\alpha^\circ = \frac{360^\circ S}{\pi r^2}$

3)

Dati S e α° calcolare r , ancora dalla proporzione : $\pi r^2 = \frac{360^\circ S}{\alpha^\circ}$; quindi

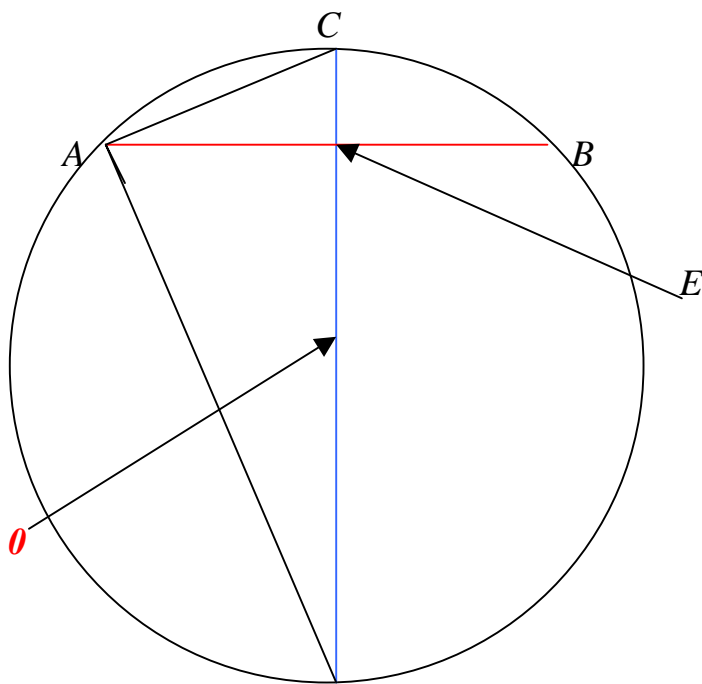
$$r^2 = \frac{360^\circ S}{\pi \alpha^\circ} \text{ e infine } r = \sqrt{\frac{360^\circ S}{\pi \alpha^\circ}};$$



Posto $OA=OB=r>0$, e $BB' \equiv l >0$ si ha $S = \frac{(l \cdot r)}{2}$ In effetti il settore circolare

BOA è equivalente ad un triangolo di altezza r e di base $BA = BB' = l$;

Come si puo' individuare la posizione di una corda, in una circonferenza?



D Tracciata la corda AB , dal centro O si conduca il diametro CD perpendicolare ad essa.

Se si conosce la distanza $x > 0$ della corda dell' estremo C del diametro cd , si conosce la posizione della corda.

SE $\overline{CE} = x$, allora $\overline{ED} = 2r - x$ essendo $0 < x < 2r$.

Si unisce A con C e con D allora il triangolo ACD è rettangolo nel vertice A , ad esso

Si possono applicare il teorema di Pitagorae il I, II Teorema di Euclide.