ELABORAZIONE di GRAFICI di FUNZIONI

Prerequisiti:

- conoscenza dell'ambiente"piano cartesiano"
- saper mettere in relazione le coppie di numeri reali con punti del piano cartesiano
- conoscenze di base sulle trasformazioni geometriche
- conoscenza delle proprietà dell'operatore valore assoluto
- conoscenza delle funzioni goniometriche di base e dei relativi grafici cartesiani
- conoscenza del software applicativo DERIVE

Obiettivi:

- saper rappresentare graficamente, senza utilizzare gli strumenti dell'analisi numerica, funzioni algebriche e trascendenti che si possono dedurre da quelle fondamentali mediante opportune trasformazioni.

Descrizione sintetica dell'attività:

- Il lavoro viene proposto agli alunni di una classe 4° del liceo tecnico delle costruzioni,come attività curricolare da svolgere in parte in classe ,in parte in laboratorio di informatica per un tempo totale di 20 ore,comprendente anche la verifica finale per valutare il raggiungimento degli obiettivi fissati.
- Scopo primario è quello di rendere più semplice la rappresentazione cartesiana di alcune funzioni i cui diagrammi si possono dedurre dai

grafici delle funzioni fondamentali che verranno classificate e ripresentate all'inizio dell'attività.

- L'obbiettivo è quello di arrivare gradualmente alla rappresentazione cartesiana di funzioni,sia algebriche che trascendenti, accostando allo studio tradizionale,con la determinazione di C.E.,limiti,segno,etc alcune *semplici osservazioni relative alle trasformazioni geometriche.*

<u>*Prima fase*</u>

- L'insegnante introduce il concetto di funzione partendo dalla motivazione della loro nascita nell'ambito della Matematica e ripercorrendone la storia.
- Vengono poi riprese le definizioni fondamentali dopo aver fissato alcuni prerequisiti.
- Si elencano le principali funzioni algebriche e si mostra il relativo grafico cartesiano.
- Vengono quindi analizzate particolari funzioni che si possono pensare come risultato di opportune trasformazioni geometriche applicate ad una ipotetica funzione y = f(x).

<u>*Seconda fase*</u>

- Con l'aiuto dell'ambiente di calcolo DERIVE si costruiscono con la guida dell'insegnante i i grafici delle funzioni analizzate nella prima fase,evidenziandone i passaggi fondamentali.
- Si propongono poi agli studenti esercitazioni in cui viene richiesto di disegnare il grafico di funzioni algebriche ottenibili mediante successive trasformazioni.

- Successivamente si svolgono alcune lezioni in laboratorio in cui gli studenti, usando il software applicativo DERIVE possono ricostruire i grafici loro proposti e confrontarli con quelli ottenuti manualmente.

Terza fase

- Dopo aver affrontato una prima parte di studio dell'analisi numerica,che ci permette mediante il calcolo dei limiti di tracciare il grafico approssimato di alcune funzioni anche fratte ed irrazionali, a partire da alcuni grafici, provare ad effettuare trasformazioni successive per ottenerne di più elaborati.
- Estendere il lavoro a funzioni trigonometriche, logaritmiche ed esponenziali.
- Con l'aiuto di DERIVE provare ad usare le trasformazioni anziché richiedere il grafico immediato delle varie funzioni trasformate.

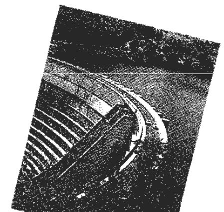
Dal problema alla matematica

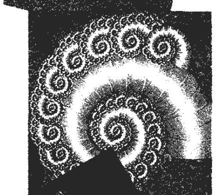
Nel XVII secolo ci furono due importanti innovazioni nella Matematica:

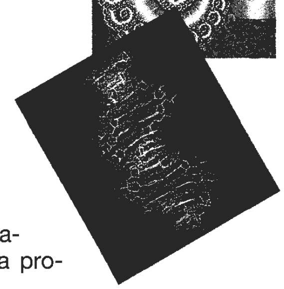
- la nascita del concetto di *funzione*;
- l'introduzione (in Geometria) del *metodo delle coordinate*.

Da allora, il concetto di funzione ha cambiato radicalmente l'essenza stessa della Matematica:

«L'ente matematico non fu più il numero, ma la legge di variazione: la funzione. La Matematica non era solamente arricchita di nuovi metodi, ma era trasformata nel suo oggetto.» (J. HADAMARD).







Le funzioni, considerate in tutti i loro aspetti, sono inoltre alla base di tutte le Scienze: esse infatti, permettendo di trattare innumerevoli problemi, hanno dato origine ad un'infinità di scoperte sorprendenti. Ad esempio:

- La forma di una diga è il frutto di studi approfonditi sulle funzioni, in cui occorre tener conto della pressione dell'acqua, del flusso dell'acqua che si vuol regolare, ecc.
- La struttura a doppia elica del D.N.A. (acido desoxiribonucleico, responsabile della trasmissione dei caratteri ereditari) è stata scoperta grazie all'analisi di FOURIER, completata sperimentalmente dalla diffrazione ai raggi X.
- Le immagini straordinarie costruite con i frattali, per esempio da YOICHIRO KAWAGUCHI (uno dei più grandi maestri dell'informatica grafica), presuppongono uno studio profondo delle funzioni matematiche.

- La fisiologia sensoriale è uno dei campi nei quali recentemente si è utilizzato il concetto di funzione. La legge «*psicofisica*» di FECKNER descrive come varia il valore di una sensazione in funzione del fenomeno che la provoca.

Definizione di funzione

Prima di definire cosa si intenda per «*funzione*», è necessario richiamare il concetto di *variabile*, che ne è alla base.

Si dice dunque *variabile*, nel senso matematico del termine, tutto ciò che *sia valutabile numericamente* e *possa assumere più di un valore*, come, ad esempio, la temperatura in un dato luogo, l'ora indicata da un certo orologio, la posizione di un satellite che si muove nello spazio, ecc.

Non è invece considerato una *variabile*, nel senso ora specificato, ciò che *non sia suscettibile di una valutazione numerica precisa*, come, ad esempio, la fama di un personaggio, la forma di un atleta, l'amore di una persona nei confronti di un'altra, ecc.

Le *variabili* si indicano preferibilmente con le ultime lettere dell'alfabeto: x, y, z, ...

Alcune variabili possono, in un certo contesto, non essere sottoposte a vincoli, ovvero è possibile attribuire ad esse qualsiasi valore preso in un dato insieme.

In questo caso si dicono variabili *indipendenti*.

Se invece, nell'ambito di più variabili, la conoscenza dei valori di alcune di esse *vincola* i valori delle rimanenti, queste ultime sono dette variabili *dipendenti*.

Ad esempio

L'area y di un quadrato è una variabile che *dipende* dalla variabile x che rappresenta la misura del lato del quadrato stesso.

Gran parte della Matematica (e di tutte le Scienze) si può intendere come lo studio dei legami che intercorrono fra le variabili.

Limitandosi al caso più semplice di due sole variabili, si è giunti, dopo una lunga elaborazione, alla seguente definizione di *funzione* (cioè di dipendenza di una variabile da un'altra) dovuta a DIRICHLET, che è di fondamentale importanza per tutto il resto della trattazione.

Dalla storia ...

Il concetto di *funzione* nasce contemporaneamente al metodo delle coordinate per rendere familiare l'idea di un numero y che dipende da un numero x variabile in un insieme A.

Il termine «*funzione*» è stato usato, per la prima volta, da LEIBNIZ (1692) e poi ripreso, anni più tardi, da G. BERNOULLI.

La forma abbreviata $y = f(x)$, ormai di uso corrente, è dovuta a CLAIRAUT (1713-1765) e a EULERO (1707-1783).

Nel corso dei secoli successivi, il concetto è stato arricchito ed ampliato finché DIRICHLET (1837) ne ha dato una definizione generale.

J.P.G. DIRICHLET

DIRICHLET J.P.G. LEJEUNE (1805-1859) fu uomo di poche parole, riservato e quasi timido. Mantenne buoni rapporti con i colleghi matematici, soprattutto con K.G. JACOBI, insieme al quale diede inizio a un nuovo periodo di fioritura per le matematiche a Berlino.

Ottimo insegnante, lasciava ai propri studenti la libertà più completa nel seguire i propri interessi matematici. È significativo quanto disse in proposito: «Un matematico può essere soltanto democratico».

DIRICHLET è entrato nella storia della matematica come fondatore della teoria analitica dei numeri.

I suoi contributi alla teoria del potenziale, alla meccanica teorica, all'algebra, alla teoria degli integrali definiti, alla teoria delle serie infinite e alla fisica teorica finirono per legare al suo nome ben venticinque concetti matematici. Ancora oggi il metodo di DIRICHLET, che consiste, come disse H. MINKOWSKI, nel «riunire in un minimo di cieche formule un massimo di veggente pensiero», suscita grande ammirazione.

da E.S.T. Mondadori

Definizioni

Richiamiamo la definizione di funzione e in particolare quella di funzione reale di variabile reale ed il concetto di grafico.

Uno dei concetti più importanti della matematica è quello di funzione;fu introdotto nel diciassettesimo secolo da Newton per esprimere sostanzialmente la dipendenza di una variabile da un'altra.

D. Si dice ***applicazione o funzione f*** una relazione tra due insiemi A e B non vuoti che ad ogni elemento x appartenente ad A associa un solo elemento y di B:l'elemento y si indica col simbolo f(x).

Se in particolare x e y sono numeri reali, si parla di ***funzioni reali di variabile reale.***

Sappiamo inoltre che l'introduzione del metodo delle coordinate cartesiane permette di stabilire una corrispondenza biunivoca tra le coppie ordinate di numeri reali ed i punti del piano,grazie a questa corrispondenza è quindi possibile rappresentare graficamente le coppie ordinate di numeri reali che soddisfano una relazione del tipo y=f(x):la totalità di queste coppie individua un sottoinsieme di punti del piano cartesiano che costituisce il grafico della funzione .

D. Si dice ***grafico o diagramma*** di una funzione il sottoinsieme dei punti del piano cartesiano le cui coordinate soddisfano la relazione y=f(x,detta rappresentazione analitica della funzione.

Grafici di funzioni elementari

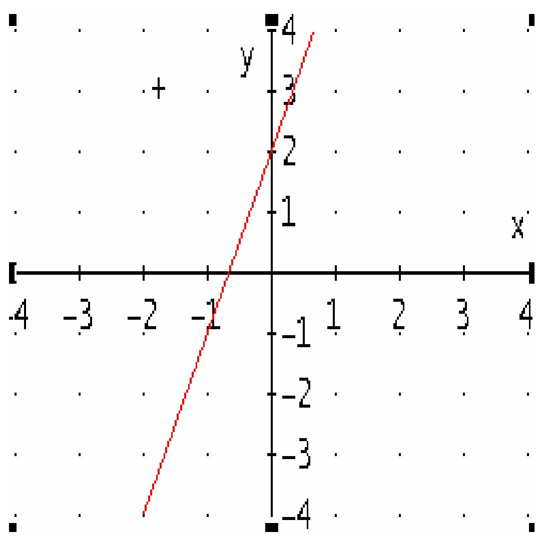
Presentiamo un elenco di grafici di funzioni algebriche elementari sui quali verranno fatte particolari considerazioni e che si supporranno noti nel corso di questo modulo di studio.

- Funzione lineare: $y=ax+b$ con $a,b \in R$ es. 1
- Funzione quadratica: $y = a\,x^2$ con $a \in R$ es. 2
- Funzione cubica: $y = a\,x^3$ con $a \in R$ es. 3
- Funzione della proporzionalità inversa: $y = k/x$ con $k \in R$ es. 4

Esempi:

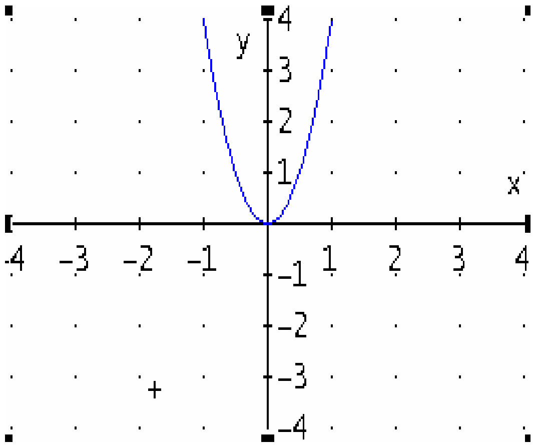
1) $y = 3 \cdot x + 2$

Funzione lineare



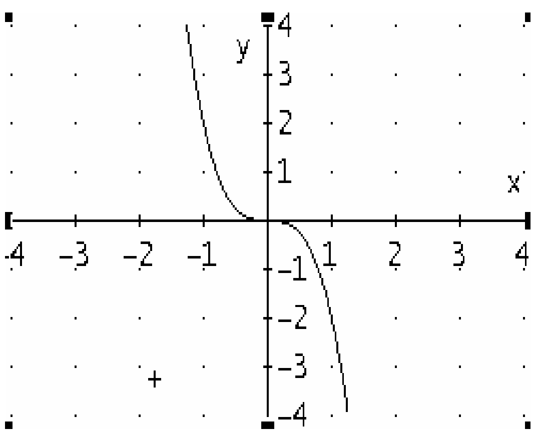
2) $y = 4 \cdot x^2$

Funzione quadratica



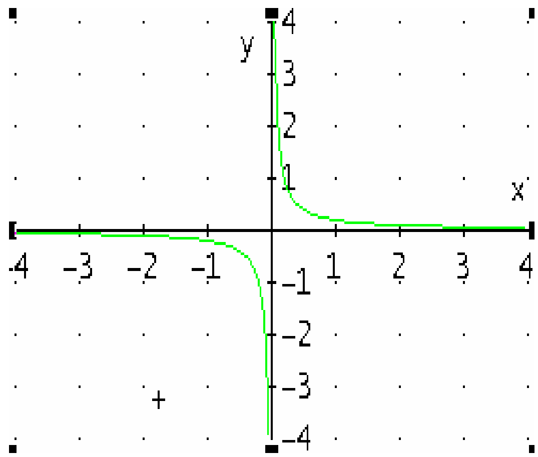
3) $y = -2 \cdot x^3$

Funzione cubica



4) $y = \dfrac{1}{5 \cdot x}$

Funzione della proporzionalità inversa



Alcuni grafici particolari

Consideriamo una funzione di equazione y=f(x) di cui sia noto il grafico;ci proponiamo di costruire i grafici di altre funzioni “in relazione” con f(x),in particolare:

1. y =-f(x) 2. y = f(-x) 3. y =f(x+k) 4. y =k f(x) 5. y =|f(x)|	6. Y =f(| x |) 7. y =f(k x) 8. y =f(x)+k 9. Y=|f(| x |)|

Ricorderai che una *trasformazione geometrica* è una corrispondenza biunivoca tra i punti di un piano. Se in questo piano fissiamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale,una trasformazione associa ad ogni punto P(x,y) del piano un punto P’(x’,y’) le cui coordinate sono legate a quelle di P.
Talvolta il grafico di una funzione f’ può essere ottenuto da quello di un’altra funzione f mediante l’applicazione di opportune trasformazioni: vediamone alcuni esempi.

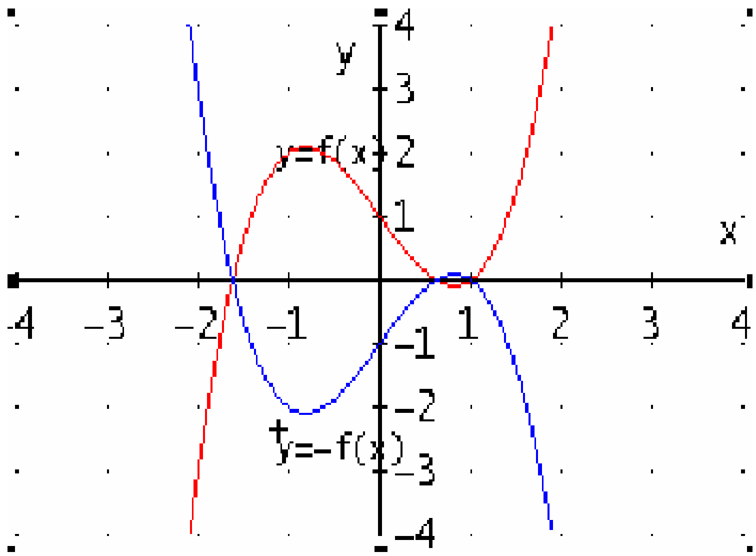
1. <u>grafico di y=-f(x)</u>

   Dato il punto P(x,y),consideriamo il suo simmetrico P’(x’,y’) rispetto all’asse delle ascisse:P e P’ hanno la stessa ascissa e ordinate opposte;le equazioni di tale trasformazione sono dunque:

   x` = x

y` = -y

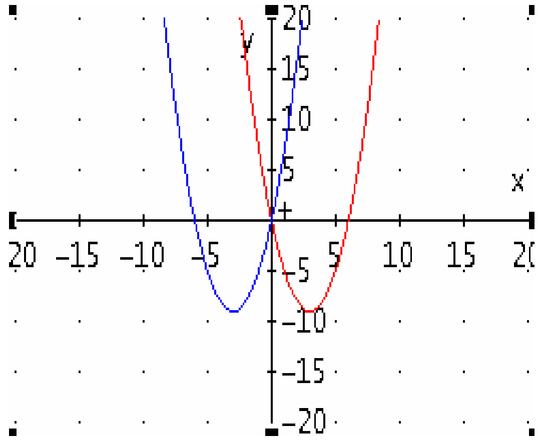
Applicando tale trasformazione(simmetria) alla funzione y=f(x) si ottiene dunque -y=f(x) ossia y=-f(x).Per ogni punto A del grafico di f basta trovare il suo simmetrico A’ rispetto all’asse delle x:si ottiene così il grafico di y=-f(x).



2. <u>grafico di y = f(-x)</u>

Con considerazioni del tutto analoghe a quelle precedenti si può costruire il grafico della funzione y = f(-x).

Infatti basta effettuare una simmetria di asse y=0,in modo tale da associare al punto P(x,y) il punto P’(-x,y), ossia il suo trasformato rispetto alla simmetria suddetta. Per le funzioni pari tale trasformazione lascerà invariato il grafico , mentre per le dispari si ritroverà y=-f(x).



20
15
10
5
y
x
-20
-15
-10
-5
5
10
15
-5
-10
-15
-20

3. <u>grafico di y=f(x+k)</u>

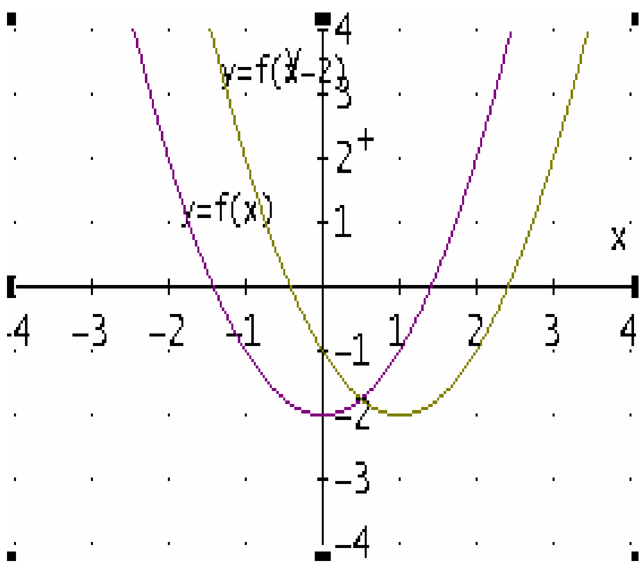
Sappiamo che una traslazione è individuata da un vettore che nel piano cartesiano è individuato dalle sue componenti(a,b).

Considerato perciò un punto P(x,y) che soddisfa l'equazione y=f(x),il suo trasformato nella traslazione di vettore v(a,b), avrà coordinate x', y' che risultano:

$x' = x + a$

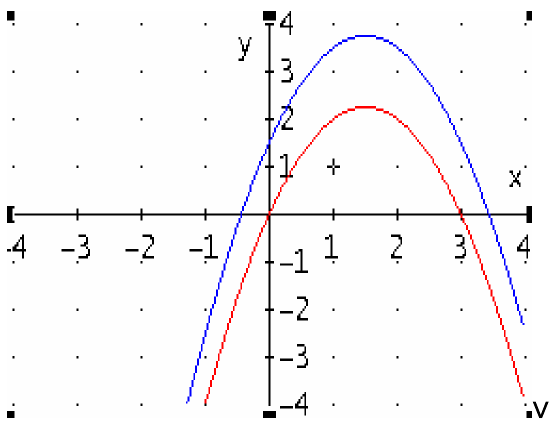
$y' = y + b$

Per costruire il grafico di y =f(x +k) dobbiamo dunque operare una traslazione di vettore v(-k,0), cioè una traslazione lungo l'asse x sul grafico già noto della curva y = f(x),



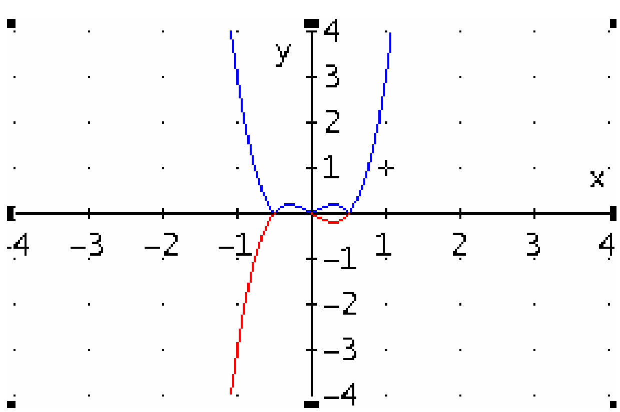
4. <u>grafico di y =f(x)+k</u>

In questo caso dobbiamo operare una traslazione di vettore(0,k), cioè una traslazione lungo l'asse y sul grafico già assegnato della curva di equazione y =f(x),di ampiezza k.



5. <u>grafico di y=|f(x)|</u>

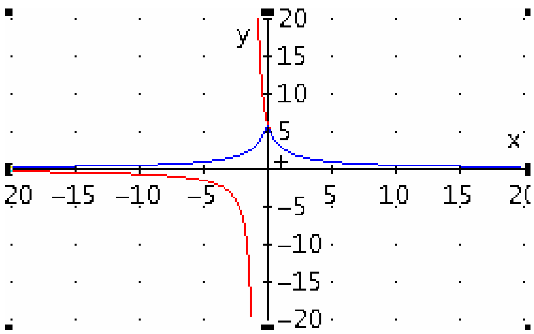
Per costruire tale grafico si può fare questa considerazione:per tutti i valori di x per i quali l'espressione f(x) assume valori positivi il grafico di y=|f(x)| coincide con quello di y=f(x), mentre per i valori che la rendono negativa, il grafico risulterà =-f(x) ossia simmetrico del precedente rispetto all'asse x.



6. <u>y=f(|x|)</u>

In corrispondenza di un valore positivo della variabile x,il relativo valore di y è lo stesso per la funzione y=f(|x|);in corrispondenza di un valore negativo della x, dovendo considerare il suo valore assoluto,si ottiene di nuovo lo stesso valore di y.

Il grafico di 5. si ottiene dunque da quello di y=f(x) operando una simmetria rispetto all’asse delle ordinate della sola parte che appartiene al semipiano positivo delle ascisse.



7. $y=kf(x)$

Per poter realizzare il grafico di tale funzione occorre richiamare il concetto di *dilatazione*.

La dilatazione è una trasformazione che assegnato un centro C(a,b) e due coefficienti di dilatazione h,k,orizzontale e verticale,manda un punto P(x,y) nel punto P(x',y') che si ottiene dalle equazioni:

$x' = h(x-a)+a$

$y' = k(y-b)+b$

Considerando una dilazione con centro nell'origine, con fattore di dilatazione orizzontale =1 e fattore di dilatazione verticale =k,si ottiene dunque :

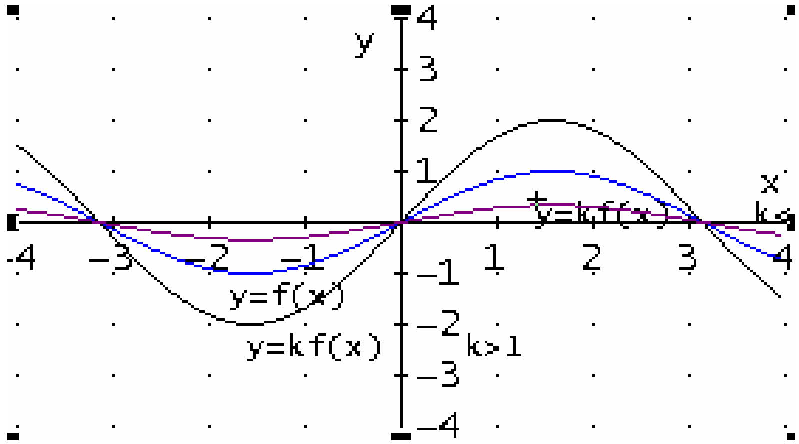
$x'= x$

$y'= ky$

che trasforma l'equazione $y=f(x)$ in $y=kf(x)$

In particolare si avrà un ingrandimento se $|k|>1$, una riduzione se $|k|<1$.

Il grafico di $y = k f(x)$ si otterrà moltiplicando per k le ordinate di quello base.


y
x
y=f(x)
y=kf(x)
k>1
y=kf(x)
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
-1
-2
-3
-4
1
2
3
4

8. y =f(kx)

Con considerazioni del tutto analoghe a quelle del punto precedente si può costruire il grafico di questa funzione.

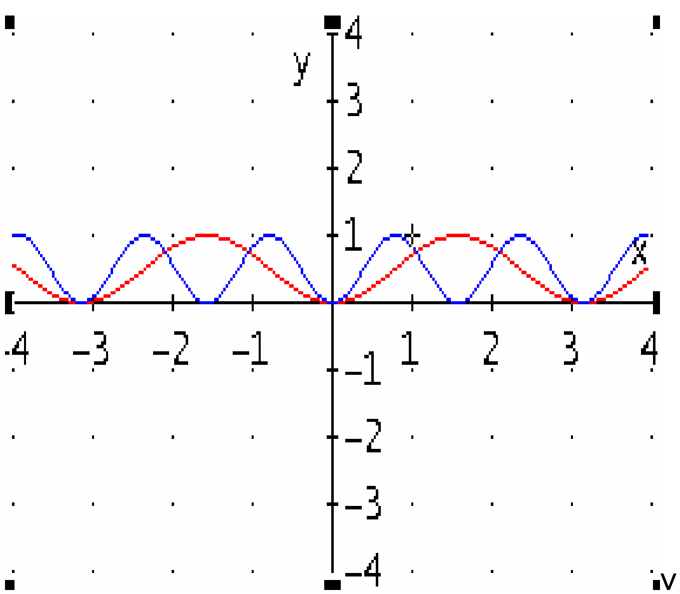
La trasformazione da applicare sarà ancora una dilatazione con centro nell'origine, fattore orizzontale 1/k, fattore verticale 1:

$x' = 1/kx$

$y' = y$

che trasforma la funzione $y = f(x)$ in $y = f(kx)$.

Si avrà dunque una riduzione di rapporto 1/k se $k > 1$ o un ingrandimento se $k < 1$.

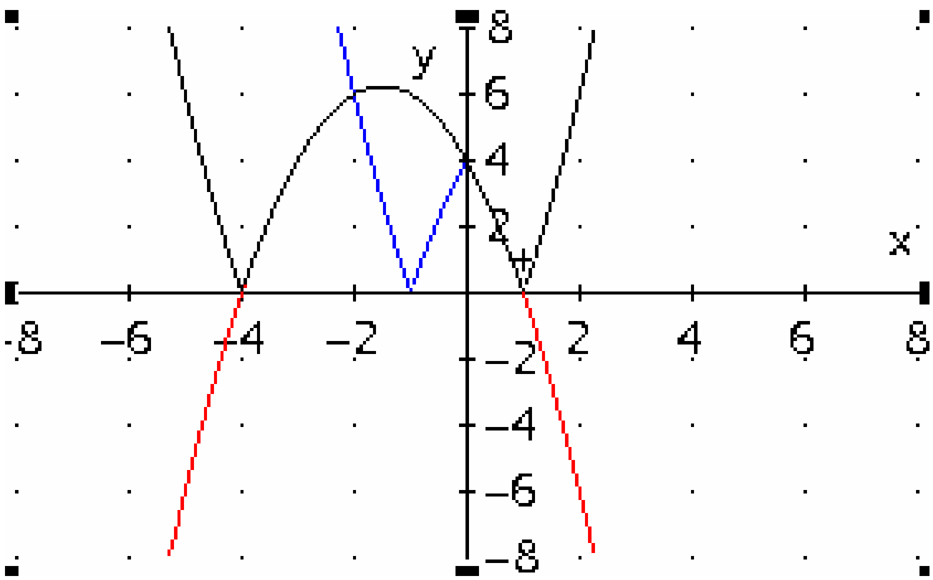


Legenda:------y=f(x)

------y=f(2x)

9. <u>y = |f (|x|)|</u>

Per costruire il grafico di f(|x|) basta considerare la sola parte del grafico di f(x) che appartiene al semipiano delle ascisse positive e costruire poi la sua simmetrica rispetto all’asse y. Dopo aver fatto ciò si ribaltano attorno all’asse x le parti negative del grafico ottenuto precedentemente e si ottiene il grafico di y = |f(|x|)|



Legenda:------y = f(x)

------y = f(|x|)

------y = |f(|x|)|

Le considerazioni fatte finora possono essere applicate successivamente ad un determinato grafico rispettando la priorità delle operazioni,

Per esempio se data $y=|3f(2x)|-5$, si dovrà operare come segue:

- $Y=f(2x)$
- $Y=3f(2x)$
- $Y=|3f(2x)|$
- $Y=|3f(2x)|-5$

Esercitazione

Mediante l'applicazione di opportune trasformazioni e le proprietà del valore assoluto costruisci il grafico delle seguenti funzioni e verifica i risultati con l'uso di un software come <u>derive, maple o calcolatrice grafica:</u>

- $y = \dfrac{x^3 - 6}{2}$;
- $y = 5 \cdot \left| x^2 - 4 \cdot |x| \right|$;
- $y = \left| \dfrac{4}{7} \cdot |x| - 8 \right|$;
- $y = |2 \cdot x| - 1$;

Grafici di funzioni goniometriche

Le considerazioni fatte precedentemente possono risultare utili anche nel caso si presenti una funzione goniometrica derivata dalle funzioni goniometriche di base .

Presentiamo alcuni esempi:

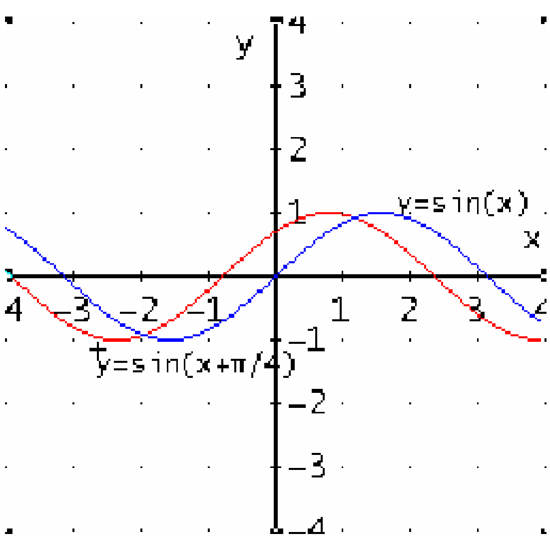
1) tracciare il grafico della funzione: $y = \sin(x + \pi/4)$

La funzione $y = \sin(x + \pi/4)$, si ottiene dalla $y = \sin(x)$ (funzione di base) con le sostituzioni:

$y \to y$

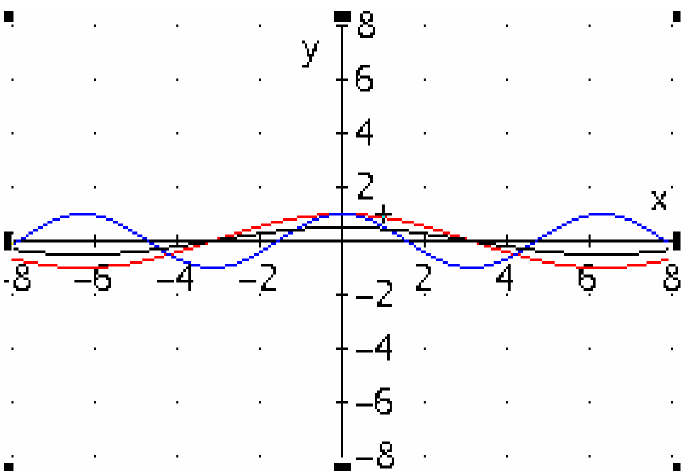
$x \to x + \pi/4$

Si tratta perciò di una traslazione di vettore $v(-\pi/4;0)$.I grafici della funzione base (in blu) e di quella trasformata sono riportati in figura.



2) tracciare il grafico della funzione $y = \frac{1}{2}\cos(\frac{x}{2})$.

Costruiamo per passaggi successivi il grafico richiesto: tracciamo prima la funzione di base $y = \cos(x)$, poi $y = \cos(\frac{x}{2})$ con una dilatazione di coefficiente 2 delle ascisse (il periodo della funzione raddoppia) ed infine $y = \frac{1}{2}\cos(\frac{x}{2})$, con una dilatazione di coefficiente $\frac{1}{2}$ delle ordinate.



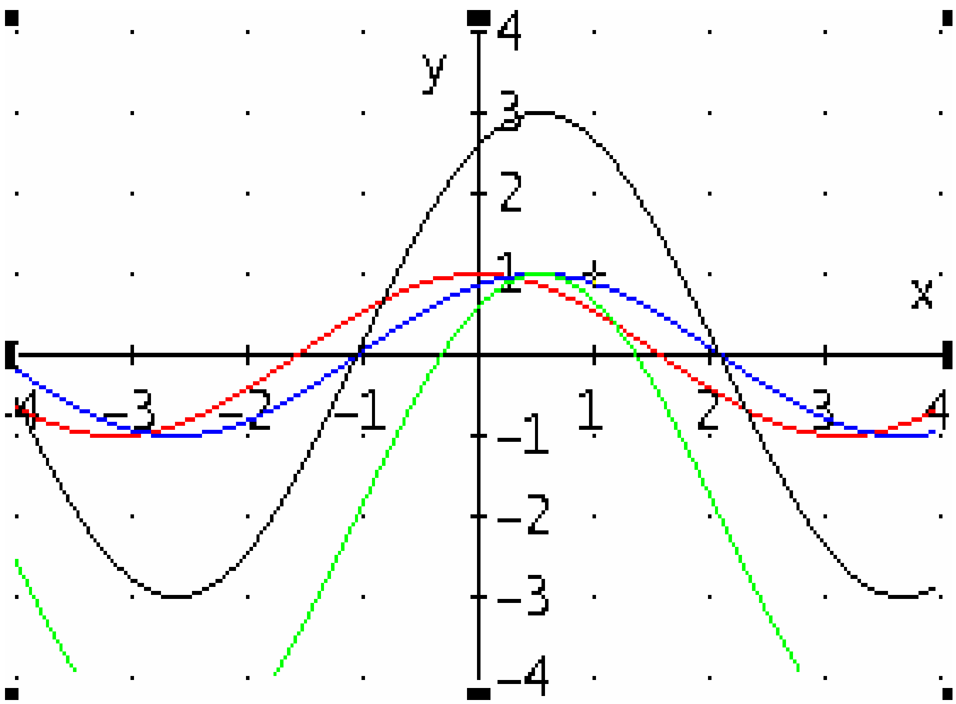
Legenda: ------ $y = \cos(x)$

------ $y = \cos(\frac{x}{2})$

------ $y = \frac{1}{2}\cos(\frac{x}{2})$

3) tracciare il grafico della funzione $y = 3\cos(x-\frac{\pi}{6})-2$.

Partiamo dal noto grafico del coseno,applichiamo poi una traslazione orizzontale di vettore v $(\frac{\pi}{6};0)$ ed otterremo il grafico di $y = \cos(x-\frac{\pi}{6})$; applichiamo ora una dilatazione verticale di fattore 3 e tracciamo il grafico di $y = 3\cos(x-\frac{\pi}{6})$, successivamente trasliamo ancora verticalmente di 2 ed otterremo la funzione richiesta $y = 3\cos(x-\frac{\pi}{6})-2$.



Légenda:------$y = \cos(x)$

------$y = \cos(x-\frac{\pi}{6})$

------$y = 3\cos(x-\frac{\pi}{6})$

------$y = 3\cos(x-\frac{\pi}{6}) -2$

Esercitazioni

Suggeriamo ancora qualche esercitazione sui grafici di funzioni goniometriche da eseguire in laboratorio di informatica con l'aiuto di DERIVE:

- $y = 4\cos(x-\frac{\pi}{6})+1$;
- $y = |\cos(x+\pi)|$;
- $y = \frac{1}{3}(\sin(2x)-4)$;
- $y = \tan(-x+\pi)$;
- $y = \tan(|3x-\frac{\pi}{6}|)$;
- $y = |\tan(x/2 + \pi/3)|$;