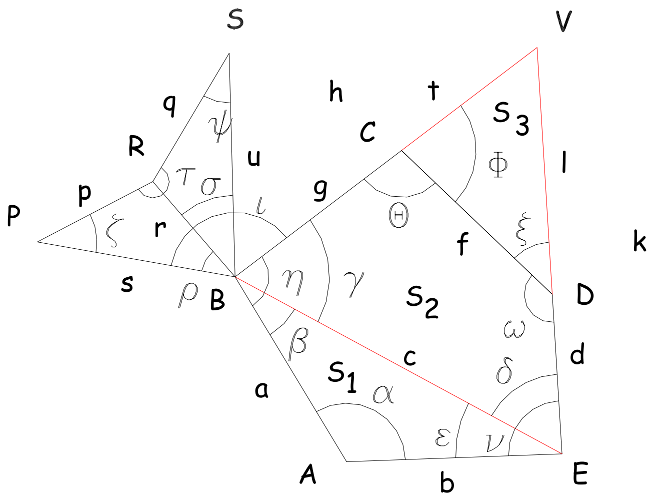
ESAME DI STATO DI ISTITUTO TECNICO PER GEOMETRI

Svolgimento



la figura è indicativa

Dal testo della traccia la superficie dell'intero appezzamento è: $S := 42287.26m^2$

Qui si nota che l'ordine di grandezza dimensionale per le approssimazioni di calcolo è il dm essendo specificata la superficie in dm².

I lati AB e AE valgono rispettivamente:

$a := 141.328m$ $b := 179.393m$

Qui si nota che le misure sono state effettuate con l'approssimazione del mm.

Attraverso le letture al cerchio orizzontale si possono deteminare gli angoli:

$\alpha := 121.3236$ $\eta := 119.9315$ $\nu := 105.3125$ $\Theta := 102.8513$

in radianti (lo svolgimento effettuato con Matcad richiede tale sistema angolare):

$\alpha := \alpha \cdot \frac{\pi}{200}$ $\eta := \eta \cdot \frac{\pi}{200}$ $\nu := \nu \cdot \frac{\pi}{200}$ $\Theta := \Theta \cdot \frac{\pi}{200}$

il lato c=BE si calcola $c := \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\alpha)}$ $c = 262.343m$

gli angoli del triangolo BAE si calcolano applicando il teorema di Carnot

$$\beta := \operatorname{acos}\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c}\right) \qquad \beta \cdot \frac{200}{\pi} = 44.6960$$

$$\varepsilon := \operatorname{acos}\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}\right) \qquad \varepsilon \cdot \frac{200}{\pi} = 33.9804$$

Dell'appezzamento si conoscono tutti gli angoli perchè l'unico angolo mancante si ricava sapendo che la somma degli angoli interni di una figura piana è dato da tanti angoli piatti quanti sono i vertici meno 2

$\omega := (5 - 2)\cdot\pi - (\Theta + \eta + \alpha + \nu)$ $\qquad \omega\cdot\frac{200}{\pi} = 150.5811$

La superficie del triangolo BAE vale:

$S_1 := \frac{a\cdot b\cdot \sin(\alpha)}{2}$ $\qquad S_1 = 11972.144198\,m^2$

gli angoli alla base BE del triangolo BEV ottenuto prolungando i lati BC e ED valgono:

$\gamma := \eta - \beta$ $\qquad \gamma\cdot\frac{200}{\pi} = 75.2355$

$\delta := \nu - \varepsilon$ $\qquad \delta\cdot\frac{200}{\pi} = 71.3321$

Da qui in poi non ha più senso l'approssimazione del mm per le distanze in quanto si utilizza un valore di superficie con approssimazione del dm^2

Il quadrilatero BCDE ha come superficie:

$S_2 := S - S_1$ $\qquad S_1 = 11972.14\,m^2$

La superficie del triangolo BVE deve essere così calcolata (noto un lato e i due angoli adiacenti):

$S_T := \frac{c^2\cdot\sin(\gamma)\cdot\sin(\delta)}{2\cdot\sin(\gamma + \delta)}$ $\qquad S_T = 38520.97\,m^2$

Per differenza il triangolo CVD ha come superficie:

$S_3 := S_T - S_2$ $\qquad S_3 = 8205.86\,m^2$

e gli angoli alla base f valgono:

$\phi := \pi - \Theta$ $\qquad \phi\cdot\frac{200}{\pi} = 97.1487$

$\xi := \pi - \omega$ $\qquad \xi\cdot\frac{200}{\pi} = 49.4189$

La superficie del triangolo CVD può essere espressa dalla formula che considera un lato e i due angoli adiacenti e, nota la superficie, si ricava con la formula inversa la lunghezza del lato:

(i calcoli sono riportati con l'approssimazione del cm e il valore dei risultati sarà riportato con l'approssimazione corretta)

$f := \sqrt{\frac{2\cdot S_3\cdot\sin(\phi + \xi)}{\sin(\phi)\cdot\sin(\xi)}}$ $\qquad f = 132.10\,m$

Applicando il teorema dei seni al triangolo CVD si calcolano i lati:

$$t := f \cdot \frac{\sin(\xi)}{\sin(\phi + \xi)} \qquad t = 124.36\,m$$

$$l := f \cdot \frac{\sin(\phi)}{\sin(\phi + \xi)} \qquad l = 177.33\,m$$

Applicando il teorema dei seni al triangolo BVE si calcolano i lati:

$$h := c \cdot \frac{\sin(\delta)}{\sin(\delta + \gamma)} \qquad h = 317.38\,m$$

$$k := c \cdot \frac{\sin(\gamma)}{\sin(\delta + \gamma)} \qquad k = 326.19\,m$$

I lati del quadrilatero g=BC e d=DE risultano essere:

$$g := h - t \qquad g = 193.02\,m$$

$$d := k - l \qquad d = 148.86\,m$$

Risposte alla prima domanda: BC, CD e DE valgono rispettivamente

$g = 193.0\,m$ $\quad$ $f = 132.1\,m$ $\quad$ $d = 148.9\,m$

Le coordinate al punto B devono essere ricavate risolvendo il problema di intersezione inversa per quanto riguarda le planimetriche X e Y; per quanto riguarda la quota invece si deve utilizzare la procedura di livellazione trigonometrica da un estremo in considerazione del fatto che i punti collimati sono assai distanti e quindi occorre tener conto della sfericità terrestre e della rifrazione atmosferica.

Parte planimetrica: noti

$X_P := 501.027\,m$	$Y_P := 398.198\,m$	$Z_P := 109.116\,m$
$X_R := 532.769\,m$	$Y_R := 390.325\,m$	$Z_R := 108.100\,m$
$X_S := 587.964\,m$	$Y_S := 397.768\,m$	$Z_S := 106.886\,m$

Gli angoli di direzione interessati valgono:

$$\theta_{BP} := 258.8637 \qquad \theta_{BR} := 289.6573 \qquad \theta_{BS} := 348.0114$$

in radianti:

$$\theta_{BP} := \theta_{BP} \cdot \frac{\pi}{200} \qquad \theta_{BS} := \theta_{BS} \cdot \frac{\pi}{200} \qquad \theta_{BR} := \theta_{BR} \cdot \frac{\pi}{200}$$

Gli angoli che occorrono per l'intersezione inversa sono:

$$\sigma := \theta_{BS} - \theta_{BR} \qquad \sigma \cdot \frac{200}{\pi} = 58.3541$$

$$\rho := \theta_{BR} - \theta_{BP} \qquad \rho \cdot \frac{200}{\pi} = 30.7936$$

Le distanze p=PR e q=RS tra i trigonometrici considerati valgono (qui ritorna l'approssimazione del mm):

$$p := \sqrt{\left(X_R - X_P\right)^2 + \left(Y_R - Y_P\right)^2} \qquad p = 32.704\,m$$

$$q := \sqrt{\left(X_S - X_R\right)^2 + \left(Y_S - Y_R\right)^2} \qquad q = 55.695\,m$$

Gli azimut (PR) e (RS) valgono:

$$(PR) := \operatorname{atan}\left[\frac{\left(X_R - X_P\right)}{\left(Y_R - Y_P\right)}\right] + \pi \qquad (PR)\cdot\frac{200}{\pi} = 115.4778$$

$$(RS) := \operatorname{atan}\left[\frac{\left(X_S - X_R\right)}{\left(Y_S - Y_R\right)}\right] \qquad (RS)\cdot\frac{200}{\pi} = 91.4667$$

di conseguenza:

$$(RP) := (PR) + \pi \qquad (RP)\cdot\frac{200}{\pi} = 315.4778$$

$$\tau := (RP) - (RS) \qquad \tau\cdot\frac{200}{\pi} = 224.0111$$

I valori di H e K dell'intersezione inversa sono dati da:

$$H := \pi - \frac{(\tau + \rho + \sigma)}{2} \qquad H\cdot\frac{200}{\pi} = 43.4206$$

$$\mu := \operatorname{atan}\left(\frac{p\cdot\sin(\sigma)}{q\cdot\sin(\rho)}\right) \qquad \mu\cdot\frac{200}{\pi} = 50.0623$$

$$K := \operatorname{atan}\left(\tan(H)\cdot\tan\left(\frac{\pi}{4} - \mu\right)\right) \qquad K\cdot\frac{200}{\pi} = -0.0506$$

Gli angoli incogniti dell'intersezione inversa risultano essere:

$$\zeta := H + K \qquad \zeta\cdot\frac{200}{\pi} = 43.3700$$

$$\psi := H - K \qquad \psi\cdot\frac{200}{\pi} = 43.4712$$

Le distanze s=BP, r=BR, u=BS sono ricavate applicando il teorema dei seni.

$$s := p\cdot\frac{\sin(\rho + \zeta)}{\sin(\rho)} \qquad s = 64.609\,m$$

$$r := p\cdot\frac{\sin(\zeta)}{\sin(\rho)} \qquad r = 44.286\,m$$

$$u := q\cdot\frac{\sin(\psi + \sigma)}{\sin(\sigma)} \qquad u = 70.155\,m$$

L'azimut (PB) vale:

$$(PB) := (PR) + \zeta \qquad (PB)\cdot\frac{200}{\pi} = 158.8478$$

Le coordinate di B sono pertanto:

$X_B := X_P + s \cdot \sin((PB))$ $\quad$ $X_B = 539.943\,m$

$Y_B := Y_P + s \cdot \cos((PB))$ $\quad$ $Y_B = 346.624\,m$

Attenzione, le coordinate del punto B se calcolate passando attraverso i punti R, S cioè considerando le altre due vie, devono essere identiche in quanto il problema di intersezione inversa se la ammette, ammette una soluzione univoca. In nessun caso è possibile la compensazione di dette coordinate.

Risoluzione della poligonale geometricamente determinata (non ha senso quindi parlare di compensazione planimetrica delle coodinate)

Il valore dell'angolo ι risulta:

dai valori dati

$\theta_{BC} := 0$ $\quad$ $\theta_{BC} \cdot \frac{200}{\pi} = 0.0000$

$\iota := \theta_{BC} - \theta_{BP} + 2\pi$ $\quad$ $\iota \cdot \frac{200}{\pi} = 141.1363$

Gli angoli azimut dei lati si calcolano con la regola di propagazione degli azimut:

$(BC) := (PB) + \iota - \pi$ $\quad$ $(BC) \cdot \frac{200}{\pi} = 99.9841$

$(BA) := (BC) + \eta$ $\quad$ $(BA) \cdot \frac{200}{\pi} = 219.9156$

$(AE) := (BA) + \alpha - \pi$ $\quad$ $(AE) \cdot \frac{200}{\pi} = 141.2392$

$(ED) := (AE) + \nu - \pi$ $\quad$ $(ED) \cdot \frac{200}{\pi} = 46.5517$

$(DC) := (ED) + \omega + \pi$ $\quad$ $(DC) \cdot \frac{200}{\pi} = 397.1328$

$(CB) := (DC) + \Theta - \pi$ $\quad$ $(CB) \cdot \frac{200}{\pi} = 299.9841$

Le coordinate dei vertici della poliganale risultano essere:

$X_A := X_B + a \cdot \sin((BA))$ $\quad$ $X_A = 496.4\,m$

$Y_A := Y_B + a \cdot \cos((BA))$ $\quad$ $Y_A = 212.2\,m$

$X_E := X_A + b \cdot \sin((AE))$ $\quad$ $X_E = 639.5\,m$

$Y_E := Y_A + b \cdot \cos((AE))$ $\quad$ $Y_E = 103.9\,m$

$X_D := X_E + d \cdot \sin((ED))$ $\quad$ $X_D = 738.9\,m$

$Y_D := Y_E + d \cdot \cos((ED))$ $\quad$ $Y_D = 214.7\,m$

$X_C := X_D + f \cdot \sin((DC))$ $\quad$ $X_C = 733.0\,m$

$Y_C := Y_D + f \cdot \cos((DC))$ $\quad$ $Y_C = 346.7\,m$

Per la verifica dei conti dovrà essere :

$X_B := X_C + g \cdot \sin((CB))$ $\quad$ $X_B = 539.943\,m$

$Y_B := Y_C + g \cdot \cos((CB))$ $\quad$ $Y_B = 346.624\,m$

Attenzione, il problema sin qui risolto non ha nulla di topografico, se non le considerazioni sulle approssimazioni, essendo risolto con procedure prettamente geometriche con univoca soluzione con compensabile.
La parte altimetrica riguarda prima la compensazione dei dislivelli ottenuti con le livellazioni di alta precisione geometriche composte dal mezzo.

I dislivelli dati sono (si noti l'approssimazione del mm):

$\Delta_{AB} := 1.735m$ $\Delta_{CD} := -0.875m$

$\Delta_{BC} := -0.928m$ $\Delta_{DE} := 0.574m$

$\Delta_{EA} := -0.531 \cdot m$

Calcolo dell'errore di chiusura sui dislivelli:

$E_\Delta := \Delta_{AB} + \Delta_{BC} + \Delta_{CD} + \Delta_{DE} + \Delta_{EA}$ $E_\Delta = -0.025\,m$

Calcolo dell'errore lineare:

$$e_l := \frac{E_\Delta}{(a + b + d + f + g)}$$ $e_l = -0.0000315$

Calcolo degli errori da attribuire ad ogni singolo tratto di livellazione pari alla lunghezza del relativo lato:

$e_{\Delta.AB} := a \cdot e_l$ $e_{\Delta.AB} = -0.004\,m$

$e_{\Delta.EA} := b \cdot e_l$ $e_{\Delta.EA} = -0.006\,m$

$e_{\Delta.DE} := d \cdot e_l$ $e_{\Delta.DE} = -0.005\,m$

$e_{\Delta.CD} := f \cdot e_l$ $e_{\Delta.CD} = -0.004\,m$

$e_{\Delta.BC} := g \cdot e_l$ $e_{\Delta.BC} = -0.006\,m$

Ponendo ora il coefficiente di rifrazione atmosferica ragionevolmente uguale a 0.13 per l'Italia settentrionale e il raggio della sfera locale mediamente pari a 6377000 m non essendo note le coordinate geografiche della località del rilievo si ha:

$K_r := 0.13$ $R := 6377000m$

Un pochino di attenzione occore nel constatare che l'altezza della mira è pari a 1.60m non specificando il terzo decimale l'ordine di approssimazione dei risultati relativi alle quote decade al cm. Inutile quindi la terza cifra decimale relativa all'altezza strumentale.

$l_p := 1.60m$ $H_B := 1.543m$

Conoscendo i valori delle letture zenitali prese in tabella e pari a:

$\psi_{BP} := 92.5764$ $\psi_{BR} := 90.6449$ $\psi_{BS} := 95.1620$

in radianti:

$\psi_{BP} := 92.5764 \cdot \frac{\pi}{200}$ $\psi_{BR} := 90.6449 \cdot \frac{\pi}{200}$ $\psi_{BS} := 95.1620 \cdot \frac{\pi}{200}$

I dislivelli calcolati appoggiandosi ai tre vertici trigonometrici P, R, S sono:

$$\Delta_{BP} := s \cdot \frac{1}{\tan(\psi_{BP})} + \frac{(1 - K_r) \cdot s^2}{2 \cdot R} + H_B - l_p \qquad \Delta_{BP} = 7.51\,m$$

$$\Delta_{BR} := r \cdot \frac{1}{\tan(\psi_{BR})} + \frac{(1 - K_r) \cdot r^2}{2 \cdot R} + H_B - l_p \qquad \Delta_{BR} = 6.50\,m$$

$$\Delta_{BS} := u \cdot \frac{1}{\tan(\psi_{BS})} + \frac{(1 - K_r) \cdot u^2}{2 \cdot R} + H_B - l_p \qquad \Delta_{BS} = 5.29\,m$$

La quota di B può essere pertanto calcolata in 3 modi distinti e tutti egualmente attendibili:

$Q_{B1} := Z_P - \Delta_{BP}$ $Q_{B1} = 101.60\,m$

$Q_{B2} := Z_R - \Delta_{BR}$ $Q_{B2} = 101.60\,m$

$Q_{B3} := Z_S - \Delta_{BS}$ $Q_{B3} = 101.60\,m$

La quota più probabile risulta pertanto la media delle tre quote calcolate anche se l'approssimazione imposta la rende apparentemente ininfluente.

$$Q_B := \frac{Q_{B1} + Q_{B2} + Q_{B3}}{3} \qquad Q_B = 101.60\,m$$

Il calcolo delle quote dei vertici della poligonale risulta essere:

$Q_C := Q_B + \Delta_{BC} - e_{\Delta.BC}$ $Q_C = 100.68\,m$

$Q_D := Q_C + \Delta_{CD} - e_{\Delta.CD}$ $Q_D = 99.81\,m$

$Q_E := Q_D + \Delta_{DE} - e_{\Delta.DE}$ $Q_E = 100.39\,m$

$Q_A := Q_E + \Delta_{EA} - e_{\Delta.EA}$ $Q_A = 99.86\,m$

per verifica:

$Q_B := Q_A + \Delta_{AB} - e_{\Delta.AB}$ $Q_B = 101.60\,m$

Relativamente alla divisione delle aree occorre dapprima dividere l'area totale in parti proporzionali ai valori 2, 3, 5 assegnati dando per scontato che tutto l'appezzamento sia di ugual valore unitario.

$$S_I := \frac{2 \cdot S}{(2 + 3 + 5)} \qquad S_I = 8457.45\,m^2$$

$$S_{II} := 3 \cdot \frac{S}{10} \qquad S_{II} = 12686.18\,m^2$$

$$S_{III} := 5 \cdot \frac{S}{10} \qquad S_{III} = 21143.63\,m^2$$

Considerando le superfici come disposte dal testo fornito e dando il nome z alla distanza da calcolare per il picchettamento del punto L posto sul lato ED, in direzione ED positiva, si ottiene:

$$z := \frac{2 \cdot S_I}{b \cdot \sin(\nu)}$$ $z = 94.6\,m$

Considerando il triangolo AED esso ha superficie uguale a:

$$S_{AED} := \frac{b \cdot d \cdot \sin(\nu)}{2}$$ $S_{AED} = 13305.64\,m^2$

La superficie da staccare al triangolo ADC per ottenere la coordinata x sul lato DC al fine di picchettare il secondo punto G posto in direzione DC positiva vale:

$$S_{ADG} := S_I + S_{II} - S_{AED}$$ $S_{ADG} = 7837.99\,m^2$

Del triangolo AED si calcolano il lato w=AD e l'angolo in D, c :

$$w := \sqrt{b^2 + d^2 - 2 \cdot b \cdot d \cdot \cos(\nu)}$$ $w = 242.5\,m$

$$\chi := \mathrm{acos}\left(\frac{d^2 + w^2 - b^2}{2 \cdot d \cdot w}\right)$$ $\chi \cdot \frac{200}{\pi} = 52.7778$

Del triangolo ADC si calcola l'angolo in D, υ

$$\upsilon := \omega - \chi$$ $\upsilon \cdot \frac{200}{\pi} = 97.8033$

e quindi la coordinata x vale:

$$x := \frac{2 \cdot S_{ADG}}{w \cdot \sin(\upsilon)}$$ $x = 64.7\,m$

Per poter picchettare dallo stesso vertice D i due picchetti L e G si calcola la differenza alla lunghezza del lato ED e si fornisce la distanza DL che riferisce il picchetto L al vertice D

$$y := d - z$$ $y = 54.2\,m$

I picchetti dunque saranno posti l'uno a 94.6 m da D verso E e l'altro a 37.5 m da D verso C

Piano quotato: scala 1:5000